# Annexe D

# Réponses des exercices proposés.

**[1]**

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{g}\tau(t^* - \frac{1}{2}\tau) + \mathbf{v}_0 t^* - \mathbf{s}_0}{t^* - \tau}$$

**[2]**

$$(v_0^2)_{min} = g\sqrt{h^2 + 9\ell^2} + hg$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{3\ell} + \sqrt{\frac{h^2}{9\ell^2} + 1}$$

**[3]**

$$d = \frac{v_0}{2g}\sqrt{3v_0^2 - 8gh} \quad \text{si} \quad h \leqslant \frac{3v_0^2}{8g}$$

**[4]**

$$h = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{g}\right)$$

$$v_p = \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{k}{g}\right)^{-1/2}$$

**[7]**

$$t^* = \frac{3\pi}{n}$$

**[8]**

i. $k\Delta > \mu mg$

ii. $\tau = \sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(\frac{mg\mu}{mg\mu - k\Delta}\right)$ si $k\Delta \geqslant 2\mu mg$

iii. $d = \Delta + \frac{v_0^2}{2\mu g}$

**[9]**

i. $x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \dfrac{F}{2M\omega_0} t \cos \omega_0 t + \dfrac{g}{\omega_0^2}$

**[16]**

$$z_{max} = \frac{g t_\star^2}{4}$$

**[17]**

i. $m(t) = m_0 - \dfrac{m_0 \gamma}{t_c}\, t$

ii. $w \geqslant \dfrac{t_c\, g}{\gamma \cos \beta}$

iii. $\|\dot{\mathbf{s}}(t_c)\| = \sqrt{[w \sin \beta \ln(1-\gamma)]^2 + [g\, t_c + w \cos \beta \ln(1-\gamma)]^2}$

$\operatorname{tg} \delta = \dfrac{w \sin \beta \ln(1-\gamma)}{g\, t_c + w \cos \beta \ln(1-\gamma)}$ où $\delta$ est l'angle que fait la vitesse par rapport à la verticale.

**[18]**

$$\mathbf{s} = \left( \frac{\mathbf{v}_0}{\alpha} + \frac{\mathbf{g}}{\alpha^2} \right) (\mathrm{e}^{\alpha t} - 1) - \frac{\mathbf{g}\, t}{\alpha}$$

**[19]**

| | masse variable | | masse constante |
|---|---|---|---|
| Portée du tir | $g\beta^{-2}(1-\mathrm{e}^{-1})$ | $<$ | $g\beta^{-2}(\sqrt{3}-1)$ |
| Durée du vol | $\beta^{-1}$ | $>$ | $\beta^{-1}(\sqrt{3}-1)$ |

**[20]**

i. $m\ddot{\mathbf{s}} = -\beta m \dot{\mathbf{s}} + m\mathbf{g} + \mathbf{T}$

ii. $\dot{\mathbf{h}} = -\beta \mathbf{h} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{g}$

iii. $\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + \dfrac{g}{\ell} \theta = 0$

$$\begin{cases} \beta^2 < 4\omega^2 : \theta(t) = \theta_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \left[ \cos\left( \sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}}\, t \right) + \dfrac{\beta}{2\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}}} \sin\left( \sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}}\, t \right) \right] \\ \beta^2 = 4\omega^2 : \theta(t) = \theta_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \left[ 1 + \dfrac{\beta}{2} t \right] \\ \beta^2 > 4\omega^2 : \theta(t) = \theta_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \left[ \mathrm{ch}\left( \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2}\, t \right) + \dfrac{\beta}{2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2}} \mathrm{sh}\left( \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2}\, t \right) \right] \end{cases}$$

iv. $(\mathbf{s}_0 \wedge \dot{\mathbf{s}}_0) \cdot \mathbf{g} = 0$

v. Non.

**[27]**

i. Repos en $\theta = -g/kh$ ou oscillations périodiques autour de la position correspondante.

ii. $\ddot{\theta}(h^2+R^2)+kh^2\theta = -gh$

iii. $\theta(t) = \left(\theta_0 + \dfrac{g}{kh}\right)\cos\left(t\sqrt{\dfrac{kh^2}{h^2+R^2}}\right) - \dfrac{g}{kh}$

**[28]**

i. Conservation de l'énergie : $\dfrac{1}{2}\dot{x}^2(1+4\alpha^2x^2)+\alpha g x^2 = gh$

ii. $\mathbf{N} = N\mathbf{E}_z = mg(1+4\alpha h)\mathbf{E}_z$

**[29]**

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g+a}{\ell}}t$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$$

**[30]**

La bille quitte le cerceau en $\theta = 120°$, l'origine des angles étant placée à la verticale inférieure.

**[32]**

| $x_{\text{éq.}}$ | $1$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| $\alpha < 1$ | instable | stable |
| $\alpha = 1$ | instable | instable |
| $\alpha > 1$ | stable | instable |

**[33]**

- Équilibre stable en $\rho_1$ tel $f(\rho_1) = 1$.
- Équilibre stable en $\rho_2$ tel que $f'(\rho_2) = 0$ et $f''(\rho_2)[f^2(\rho_2)-1] > 0$.
- Équilibre instable en $\rho_3$ tel que $f'(\rho_3) = 0$ et $f''(\rho_3)[f^2(\rho_3)-1] < 0$.

**[34]**

$$\lambda_{\text{éq.}} = 0 \quad \begin{cases} \text{stable pour } k < 0 \\ \text{instable pour } k > 0 \\ \text{marginalement stable pour } k = 0 \end{cases}$$

**[35]**

| $x_{\text{éq.}}$ | $0$ | $\pm\sqrt{1-\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha^4 < 1$ | marginalement stable | instable | instable |
| $\alpha^4 = 1$ | instable | instable | instable |
| $\alpha^4 > 1$ | instable | — | instable |

**[38]**

i. $m\left[\dfrac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\dfrac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{s})\right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$

ii. $\mathcal{V}(\theta) = -(1+\cos\theta)\sin^2\theta - 4\alpha^2\cos\theta$

iii. Oscillations périodiques autour de $\theta = 0$.

iv.

| $\theta_{\text{éq.}}$ | $0$ | $\pm\arccos\left[\dfrac{-1+2\sqrt{1+3\alpha^2}}{3}\right]$ |
|---|---|---|
| $\alpha^2 < 1$ | instable | stable |
| $\alpha^2 = 1$ | stable | stable |
| $\alpha^2 > 1$ | stable | — |

**[39]**

i. $m\left[\dfrac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\dfrac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{s})\mathbf{\Omega}\right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$

ii. $\left(\dfrac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \mathcal{V}(\theta) = C \qquad$ où $\quad \mathcal{V}(\theta) = \dfrac{n^2}{4}\sin^2(2\theta) + \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$

iii.

| $\theta_{\text{éq.}}$ | $[-\pi+\arcsin(1/n^2)]/2$ | $-\pi/4$ | $[-\arcsin(1/n^2)]/2$ | $\pi/4$ |
|---|---|---|---|---|
| $n^2 < 1$ | — | stable | — | instable |
| $n^2 = 1$ | stable | stable | stable | instable |
| $n^2 > 1$ | stable | instable | stable | instable |

**[40]**

i. $m\left[\dfrac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\dfrac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{s})\right] = -m\mu\mathbf{s} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}$

ii. $\dot\theta^2 + (\mu - \Omega^2)\cos^2\theta = C$

iii.

| $\theta_{\text{éq.}}$ | $0$ | $\pm\pi/2$ |
|---|---|---|
| $\mu < \Omega^2$ | stable | instable |
| $\mu = \Omega^2$ | équilibre relatif indifférent | |
| $\mu > \Omega^2$ | instable | stable |

**[41]**

i. $m\left[\dfrac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\dfrac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \mathbf{\Omega}\wedge\left(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{s}\right)\right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$

ii. $a\ddot\theta + a\Omega^2\cos\theta\sin\theta = -g\sin\theta\cos(\Omega t)$ où $\theta$ est mesuré à partir de la verticale inférieure.

iii. Équilibre relatif en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

**[52]**

i. $\ddot{\mathbf{s}} = \beta\,\dfrac{\mathbf{s}}{||\mathbf{s}||^6}$

iii. $\frac{1}{2}(\dot r^2 + h^2 r^{-2}) + \frac{1}{4}\beta r^{-4} = e \;;\quad r^2\dot\theta = h$

iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = \frac{1}{2}h^2 r^{-2} + \frac{1}{4}\beta r^{-4}$

v. • $\beta = 0 \quad : \quad z = 0 \;;\quad r = \dfrac{r_0}{\cos\theta}$

- $\beta < 0\ ;\quad e = 0 \quad : \quad z = 0\ ;\quad r = \sqrt{\dfrac{-\beta}{2h^2}}\cos\theta$
- $\beta < 0\ ;\quad e = -\dfrac{h^4}{4\beta} \quad :$

$$\begin{cases} r_0 < r_c \quad : \quad z = 0\ ; \quad r = r_c \operatorname{th} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\theta - \theta_*) \\ r_0 = r_c \quad : \quad z = 0\ ; \quad r = r_c \\ r_0 > r_c \quad : \quad z = 0\ ; \quad r = r_c \coth \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\theta - \theta_*) \end{cases} \qquad \text{où } r_c = \frac{\sqrt{-\beta}}{h}$$

**[53]**

i. $\ddot{\mathbf{s}} = \beta \dfrac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^8}$

iii. $\dfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) + \dfrac{1}{6}\beta r^{-6} = e\ ;\quad r^2\dot{\theta} = h$

iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = \dfrac{1}{2}h^2 r^{-2} + \dfrac{1}{6}\beta r^{-6}$

v.
- $\beta = 0 \quad : \quad z = 0\ ;\quad r = \dfrac{r_0}{\cos\theta}$
- $\beta < 0\ ;\quad e = 0 \quad : \quad z = 0\ ;\quad r = \left(\dfrac{-\beta}{3h^2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cos 2\theta}$

**[54]**

i. $\ddot{\mathbf{s}} = -(\alpha^2 r^{-2} + \beta^2 r^{-3})\,\mathbf{e}_r$

ii. $\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}\ ;\quad \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) - \frac{1}{2}\beta^2 r^{-2} - \alpha^2 r^{-1} = e$

iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = (h^2 - \beta^2) r^{-2} - 2\alpha^2 r^{-1}$

**[55]**

i. État lié (mouvement borné) avec trajectoire plane

$$r = \frac{r_*}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2e(h^2+\alpha)}{\mu^2}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{h^2+\alpha}{h^2}}\,\theta\right)} \quad \text{où} \quad r_* = \frac{h^2+\alpha}{\mu} \quad \text{et} \quad e < 0$$

ii. $\dot{\theta}_*^2 = \dfrac{\mu r_* - \alpha}{r_*^4}\ ;$ stable

iii. Oui.

iv. $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r_*^4}{\mu r_* - \alpha}$

**[56]**

i. $\ddot{\mathbf{s}} = -(\mu r^{-2} + \beta w)\mathbf{e}_r$

ii. $\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) - \mu r^{-1} + \beta w r = c\ ;\quad r^2\dot{\theta} = h$

vi. On distingue les cas $\alpha < -\dfrac{1}{8}$, $\alpha = -\dfrac{1}{8}$, $-\dfrac{1}{8} < \alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$.

vii. $\alpha = \dfrac{1-\gamma}{2\gamma^2}$

viii. $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \pm\rho\sqrt{(1-\rho)(2\alpha\rho^2+\rho-1)}$

**[57]**

i. $m\ddot{\mathbf{s}} = -\dfrac{mk}{r^4}\mathbf{e}_r$

iii. $r^2\dot\theta = h\,; \quad \dfrac{\dot r^2}{2} + \dfrac{h^2}{2r^2} - \dfrac{k}{3r^3} = e$

iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = \dfrac{h^2}{2r^2} - \dfrac{k}{3r^3}$

v. $a = \dfrac{k}{3h^2}$ et $e = 0$

**[60]**

i. $m\ddot{\mathbf{s}} = 2m\,\omega_0\,\mathbf{e}_z \wedge \dot{\mathbf{s}} + m\,\omega_0^2 d^3 r^{-3}\,\mathbf{s} + N\,\mathbf{e}_z + m\,\mathbf{g}$

ii. $\dot r^2 + \omega_0^2 r^2 + 2\omega_0^2 d^3 r^{-1} = 3\omega_0^2 d^2 \;\; ; \quad \dot\theta = \omega_0$

iii. $r = d \;\; ; \quad z = 0$

**[73]**

$\mathbf{J}_{\mathrm{O}} = \dfrac{m\ell^3}{3}\left(4\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\right)$
où $\mathbf{e}_x$ est dirigé selon la partie horizontale du T et $\mathbf{e}_z$ est perpendiculaire au plan du solide.

**[74]**

$\mathbf{J}_{\mathrm{C}} = \dfrac{ma^2}{2}\left(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\right)$
où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du cerceau.

**[75]**

Le centre d'inertie se trouve sur l'axe de symétrie à une distance $3a/8$ de la face plane.

$\mathbf{J}_{\mathrm{C}} = \dfrac{83}{320}\,m\,a^2\,\mathbf{I} + \dfrac{9}{64}\,m\,a^2\mathbf{e}_z\,\mathbf{e}_z$
où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire selon l'axe de symétrie de révolution.

**[76]**

Le centre d'inertie se trouve sur l'axe de symétrie à une distance $\dfrac{3a}{20}$ de O.

$\mathbf{J}_{\mathrm{C}} = \dfrac{39}{80}ma^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) + + \dfrac{23}{50}ma^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$
où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire pointant vers le cylindre selon l'axe de symétrie de révolution.

**[80]**

Rotation de la tige à vitesse angulaire constante.

**[81]**

Oscillations périodiques entre les deux positions opposées où la barre est verticale.

**[82]**

i. $\dfrac{1}{2}(J_{\mathrm{C}} + mh^2)\dot\theta^2 + mgh\sin\theta = mgh$ où $\theta$ est l'inclinaison par rapport à l'horizontale.

ii. $\dot{\mathbf{s}}_\mathsf{C} = -h\sqrt{\dfrac{2mgh}{J_\mathsf{C}+mh^2}}\,\mathbf{E}_z$ où $\mathbf{E}_z$ est le vecteur unitaire dans la direction verticale.

**[83]**

$$\operatorname{tg}\theta^* = -\frac{a}{g}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\mathsf{C}+mh^2}{mh\sqrt{g^2+a^2}}}$$

**[88]**

$$\frac{7}{10}(b-a)\dot\theta_{\text{abs}}^2 + g(1-\cos\theta_{\text{abs}}) = \frac{7}{10}(b-a)\left(\frac{w}{b-a}+\Omega\right)^2 \quad \text{où} \quad \theta_{\text{abs}} = 0 \text{ en } t=0.$$
$$\theta_{\text{rel}} = \theta_{\text{abs}} - \Omega t$$

**[89]**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(9\pi-16)a}{8g}}$$

**[90]**

$$\operatorname{tg}\theta_0 = 3\mu$$

**[94]**

i. $\dot x + a\dot\theta = 0$
$2\ddot x\cos\varphi + a\ddot\varphi + 2g\sin\varphi = 0$
$\dot x^2 + \frac{1}{4}a^2\dot\theta^2 + \frac{1}{8}a^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}a\dot x\dot\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}ga\cos\varphi = 0$
où $x$ et $\theta$ mesurent respectivement la translation et la rotation du disque tandis que $\varphi$ est l'angle formé par OP avec la verticale inférieure.

ii. Oscillations périodiques de P entre les positions horizontales de part et d'autre de O.

**[95]**

Le mouvement peut être étudié à partir de l'intégrale première

$$\dot\theta^2\left[\frac{R-a}{2}\left(\frac{7}{5} - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right)\right] - g\cos\theta = -g\cos\theta_0.$$

Il consiste en des oscillations de la sphère sur le bloc entre les angles $\pm\theta_0$.

L'intégrale première $(M+m)\dot x + m(R-a)\dot\theta\cos\theta = 0$ permet de déterminer
$$x_{max} = 2\frac{m}{m+M}(R-a)\sin\theta_0$$

**[96]**

Équilibre marginalement stable pour $x=0, \theta=0$ et équilibre instable pour $x=0, \theta=\pi$.

**[97]**

i. $\dot x + a\dot\theta = 0,\ \dot y\sin\alpha = \dot x\cos\alpha - a\dot\theta,\ \dot y\cos\alpha = -\dot x\sin\alpha$

ii. $N_\mathsf{A} = (m+M)g, \quad T_\mathsf{A} = -Mg\operatorname{tg}(\alpha/2), \quad N_\mathsf{B} = Mg, \quad T_\mathsf{B} = -Mg\operatorname{tg}(\alpha/2)$

iii. $\ddot x = \dfrac{4g}{9\sqrt{3}}$

**[98]**

i. $\mathbf{H}_\mathsf{C} = \mathbf{H}_0$ ; $\quad T_\mathsf{C} = T_0 = \dfrac{9}{2}A\sigma^2$

ii. $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{H}_0}{\|\mathbf{H}_0\|}$ ; $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \dfrac{2T_0}{\|\mathbf{H}_0\|}$ = constante

L'extrémité de $\boldsymbol{\omega}$ appartient donc à un plan fixe perpendiculaire à $\mathbf{k}$.

iv. Mouvement limite instable avec $\omega_{1_\infty} = 0$, $\omega_{2_\infty} = \dfrac{3\sigma}{\sqrt{5}}$ et $\omega_{3_\infty} = 0$.

**[101]**

Précession de signe variable.

**[102]**

Toupie forte.

**[103]**

Mouvement avec rebroussement.

**[108]**

$$\dot{\theta} = \Omega \ ; \quad z - z_0 = \frac{5g}{2\Omega^2}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\Omega t\right) - 1\right]$$

où $\theta$ et $z$ sont les coordonnées cylindriques du centre d'inertie de la sphère.

**[109]**

i. $\dot{\theta}^2 - 4kn\omega\cos\theta + \dfrac{2g}{a}\sin\theta = C$

$\dot{\psi} + \omega\cos\theta = n$

ii. Oscillations de période $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ si $C < 2\alpha$

où $\alpha = \sqrt{\dfrac{g^2}{a^2} + 4k^2n^2\omega^2}$

**[110]**

Oscillations pendulaires autour de la position inférieure.
Pas de rotation autour de la verticale.