

Annexe D

Réponses des exercices proposés.

[1]

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{g}\tau(t_{\star} - \frac{1}{2}\tau) + \mathbf{v}_0 t_{\star} - \mathbf{s}_0}{t_{\star} - \tau}$$

[2]

$$(v_0^2)_{\min} = g\sqrt{h^2 + 9\ell^2} + hg$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3\ell} + \sqrt{\frac{h^2}{9\ell^2} + 1}$$

[3]

$$d = \frac{v_0}{2g} \sqrt{3v_0^2 - 8gh} \quad \text{si } h \leq \frac{3v_0^2}{8g}$$

[4]

$$h = \frac{1}{2k} \ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{g} \right)$$
$$v_p = \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{k}{g} \right)^{-1/2}$$

[7]

$$t_{\star} = \frac{3\pi}{n}$$

[8]

- i. $k\Delta > \mu mg$
- ii. $t_{\star} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left(\frac{mg\mu}{mg\mu - k\Delta} \right) \quad \text{si } k\Delta \geq 2\mu mg$
- iii. $d = \Delta + \frac{v_0^2}{2\mu g}$

[9]

$$i. x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{F}{2M\omega_0} t \cos \omega_0 t + \frac{g}{\omega_0^2}$$

[11]

$\mathbf{s}_P = R\mathbf{e}_r + R\mathbf{e}_1$ où $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_1$ sont unitaires et portés respectivement par **OC** et **CP**

$$\dot{\mathbf{s}}_P = R\omega\mathbf{e}_\theta + R(\dot{\theta} + \omega)\mathbf{e}_2, \quad \ddot{\mathbf{s}}_P = -R\omega^2\mathbf{e}_r - R(\dot{\theta} + \omega)^2\mathbf{e}_1 + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{v}_r = R\dot{\theta}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_e = R\omega(\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{a}_r = R\ddot{\theta}\mathbf{e}_2 - R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_c = -2R\omega\dot{\theta}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_e = -R\omega^2(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_1)$$

[17]

$$z_{\max} = \frac{gt_*^2}{4}$$

[18]

$$i. m(t) = m_0 - \frac{m_0\gamma}{t_c} t$$

$$ii. w \geq \frac{t_c g}{\gamma \cos \beta}$$

$$iii. \|\dot{\mathbf{s}}(t_c)\| = \sqrt{[w \sin \beta \ln(1 - \gamma)]^2 + [g t_c + w \cos \beta \ln(1 - \gamma)]^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{w \sin \beta \ln(1 - \gamma)}{g t_c + w \cos \beta \ln(1 - \gamma)} \text{ où } \delta \text{ est l'angle que fait la vitesse par rapport à la verticale.}$$

[19]

$$s(t) = \left(\frac{v_0}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2} \right) (e^{\alpha t} - 1) - \frac{g t}{\alpha}$$

[20]

$$s(t) = \left(\frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta t}) + \frac{g t}{\beta}$$

[21]

	masse variable		masse constante
Portée du tir	$g\beta^{-2}(1 - e^{-1})$	<	$g\beta^{-2}(\sqrt{3} - 1)$
Durée du vol	β^{-1}	>	$\beta^{-1}(\sqrt{3} - 1)$

[22]

$$i. m\ddot{\mathbf{s}} = -\beta m\dot{\mathbf{s}} + m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

$$ii. \dot{\mathbf{h}} = -\beta\mathbf{h} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{g}$$

$$iii. \ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \text{ où } \omega = \sqrt{g/\ell}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^2 < 4\omega^2 : \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\beta}{2}t} \left[\cos \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}} t \right) + \frac{\beta}{2\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}}} \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}} t \right) \right] \\ \beta^2 = 4\omega^2 : \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\beta}{2}t} \left[1 + \frac{\beta}{2} t \right] \\ \beta^2 > 4\omega^2 : \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\beta}{2}t} \left[\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2} t \right) + \frac{\beta}{2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \omega^2} t \right) \right] \end{array} \right.$$

iv. $(\mathbf{s}_0 \wedge \dot{\mathbf{s}}_0) \cdot \mathbf{g} = 0$

v. Non.

[25]

$$T = f\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$

[26]

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} f\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right)$$

[31]

i. Repos en $\theta = -g/kh$ ou oscillations périodiques autour de la position correspondante.

ii. $\ddot{\theta}(h^2 + R^2) + kh^2\theta = -gh$

iii. $\theta(t) = \left(\theta_0 + \frac{g}{kh}\right) \cos\left(t \sqrt{\frac{kh^2}{h^2 + R^2}}\right) - \frac{g}{kh}$

[32]

i. Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}\dot{x}^2(1 + 4\alpha^2 x^2) + \alpha g x^2 = gh$

ii. $\mathbf{N} = N\mathbf{E}_z = mg(1 + 4\alpha h)\mathbf{E}_z$

[33]

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g+a}{\ell}} t$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$$

[34]

La bille quitte le cerceau en $\theta = 2\pi/3$ ($\theta = 0$ à la verticale inférieure).

[37]

$x_{\text{éq.}}$	1	α
$\alpha < 1$	instable	marginalelement stable
$\alpha = 1$	instable	instable
$\alpha > 1$	marginalelement stable	instable

[38]

- Équilibre marginalelement stable en ρ_1 tel $f(\rho_1) = 1$.
- Équilibre marginalelement stable en ρ_2 tel que $f'(\rho_2) = 0$ et $f''(\rho_2)[f^2(\rho_2) - 1] > 0$.
- Équilibre instable en ρ_3 tel que $f'(\rho_3) = 0$ et $f''(\rho_3)[f^2(\rho_3) - 1] < 0$.

[39]

$$\lambda_{\text{éq.}} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{stable pour } k < 0 \\ \text{instable pour } k > 0 \\ \text{marginalelement stable pour } k = 0 \end{array} \right.$$

[40]

$x_{\text{éq.}}$	0	$\pm\sqrt{1-\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\alpha}$
$\alpha^4 < 1$	marginalelement stable	instable	instable
$\alpha^4 = 1$	instable	instable	instable
$\alpha^4 > 1$	instable	—	instable

[43]

i. $m \left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{s}) \right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_\beta$

ii. $\mathcal{V}(\theta) = -(1 + \cos \theta) \sin^2 \theta - 4\alpha^2 \cos \theta$

iii. Oscillations périodiques autour de $\theta = 0$.

$\theta_{\text{éq.}}$	0	$\pm \arccos \left[\frac{-1 + 2\sqrt{1 + 3\alpha^2}}{3} \right]$
iv. $\alpha^2 < 1$	instable	marginalelement stable
$\alpha^2 = 1$	marginalelement stable	marginalelement stable
$\alpha^2 > 1$	marginalelement stable	—

v. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega}$

[44]

i. $m \left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{s})\boldsymbol{\Omega} \right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_\beta$

ii. $\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \mathcal{V}(\theta) = C$ où $\mathcal{V}(\theta) = \frac{n^2}{4} \sin^2(2\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta)$

$\theta_{\text{éq.}}$	$[-\pi + \arcsin(1/n^2)]/2$	$-\pi/4$	$[-\arcsin(1/n^2)]/2$	$\pi/4$
iii. $n^2 < 1$	—	marginalelement stable	—	instable
$n^2 = 1$	marginalelement stable	marginalelement stable	marginalelement stable	instable
$n^2 > 1$	marginalelement stable	instable	marginalelement stable	instable

[45]

i. $m \left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{s}) \right] = -m\mu \mathbf{s} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_\beta$

ii. $\dot{\theta}^2 + (\mu - \Omega^2) \cos^2 \theta = C$

$\theta_{\text{éq.}}$	0	$\pm\pi/2$
iii. $\mu < \Omega^2$	marginalelement stable	instable
$\mu = \Omega^2$	équilibre indifférent	
$\mu > \Omega^2$	instable	marginalelement stable

[46]

- i. $m \left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{s}) \right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_\beta$
- ii. $a\ddot{\theta} + a\Omega^2 \cos\theta \sin\theta = -g \sin\theta \cos(\Omega t)$ où $\theta = 0$ à la verticale inférieure.
- iii. Équilibre relatif en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

[47]

- i. $m \left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{s}) \right] = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_\beta$
- ii. $\dot{x}^2 - \Omega^2 x^2 \sin^2 \alpha + 2gx \cos \alpha = C$
- iii. Équilibre relatif instable en $x_{\text{eq}} = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}$
- iv. $x(t) = \left(x_0 - \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \text{ch}(\Omega t \sin \alpha) + \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}$

[50]

- i. $r^2 \dot{\theta} = \sqrt{p z_0} v_0$ et $\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0$
- iii. $v_0^2 > 2gz_0$

[59]

- i. $\ddot{\mathbf{s}} = \beta \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^6}$
- iii. $\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) + \frac{1}{4} \beta r^{-4} = e$; $r^2 \dot{\theta} = h$
- iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = \frac{1}{2} h^2 r^{-2} + \frac{1}{4} \beta r^{-4}$
- v. • $\beta = 0$: $z = 0$; $r = \frac{r_0}{\cos \theta}$
- $\beta < 0$; $e = 0$: $z = 0$; $r = \sqrt{\frac{-\beta}{2h^2}} \cos \theta$
- $\beta < 0$; $e = -\frac{h^4}{4\beta}$:
- $$\begin{cases} r_0 < r_c : z = 0 ; r = r_c \text{th} \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta - \theta_*) \\ r_0 = r_c : z = 0 ; r = r_c \\ r_0 > r_c : z = 0 ; r = r_c \coth \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta - \theta_*) \end{cases} \quad \text{où } r_c = \frac{\sqrt{-\beta}}{h}$$

[60]

- i. $\ddot{\mathbf{s}} = \beta \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^8}$
- iii. $\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) + \frac{1}{6} \beta r^{-6} = e$; $r^2 \dot{\theta} = h$
- iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = \frac{1}{2} h^2 r^{-2} + \frac{1}{6} \beta r^{-6}$

- v. • $\beta = 0$: $z = 0$; $r = \frac{r_0}{\cos \theta}$
 • $\beta < 0$; $e = 0$: $z = 0$; $r = \left(\frac{-\beta}{3h^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cos 2\theta}$

[61]

- i. $\ddot{\mathbf{s}} = -(\alpha^2 r^{-2} + \beta^2 r^{-3}) \mathbf{e}_r$
 ii. $\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}$; $\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) - \frac{1}{2}\beta^2 r^{-2} - \alpha^2 r^{-1} = e$
 iii. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = (h^2 - \beta^2)r^{-2} - 2\alpha^2 r^{-1}$

[62]

- i. État lié (mouvement borné) avec trajectoire plane ouverte

$$r = \frac{r_\star}{1 + \sqrt{1 + \frac{2e(h^2 + \alpha)}{\mu^2} \cos \left(\sqrt{\frac{h^2 + \alpha}{h^2}} \theta \right)}} \quad \text{où} \quad r_\star = \frac{h^2 + \alpha}{\mu} \quad \text{et} \quad e < 0$$

 ii. Orbite circulaire marginalement stable de rayon $r_\star$.
 iii. Oui.
 iv. $T^2 = \frac{4\pi^2 r_\star^4}{\mu r_\star - \alpha}$

[63]

- i. $\ddot{\mathbf{s}} = -(\mu r^{-2} + \beta w) \mathbf{e}_r$
 ii. $\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) - \mu r^{-1} + \beta w r = c$; $r^2 \dot{\theta} = h$
 vi. On distingue les cas $\alpha < -\frac{1}{8}$, $\alpha = -\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8} < \alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$.
 vii. $\alpha = \frac{1 - \gamma}{2\gamma^2}$
 viii. $\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \rho \sqrt{(1 - \rho)(2\alpha\rho^2 + \rho - 1)}$

[64]

- i. $m\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{mk}{r^4} \mathbf{e}_r$
 iii. $r^2 \dot{\theta} = h$; $\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{k}{3r^3} = e$
 iv. $\tilde{\mathcal{V}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{k}{3r^3}$
 v. $a = \frac{k}{3h^2}$ et $e = 0$

[67]

- i. $m\ddot{\mathbf{s}} = 2m\omega_0 \mathbf{e}_z \wedge \dot{\mathbf{s}} + m\omega_0^2 d^3 r^{-3} \mathbf{s} + N \mathbf{e}_z + m\mathbf{g}$
 ii. $\dot{r}^2 + \omega_0^2 r^2 + 2\omega_0^2 d^3 r^{-1} = 3\omega_0^2 d^2$; $\dot{\theta} = \omega_0$
 iii. $r = d$; $z = 0$

[80]

$$\mathbf{J}_O = \frac{m\ell^3}{3} (4\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z)$$

où $\mathbf{e}_x$ est dirigé selon la partie horizontale du T et $\mathbf{e}_z$ est perpendiculaire au plan du solide.

[81]

$$\mathbf{J}_C = \frac{ma^2}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z)$$

où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du cerceau.

[82]

Le centre d'inertie se trouve sur l'axe de symétrie à une distance $3a/8$ de la face plane.

$$\mathbf{J}_C = \frac{83}{320} ma^2 \mathbf{I} + \frac{9}{64} ma^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire selon l'axe de symétrie de révolution.

[83]

Le centre d'inertie se trouve sur l'axe de symétrie à une distance $\frac{3a}{20}$ de O.

$$\mathbf{J}_C = \frac{39}{80} ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) + \frac{23}{50} ma^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire pointant vers le cylindre selon l'axe de symétrie de révolution.

[87]

Rotation de la tige à vitesse angulaire constante.

[88]

Oscillations périodiques entre les deux positions opposées où la barre est verticale.

[89]

i. $\frac{1}{2}(J_C + mh^2)\dot{\theta}^2 + mgh \sin \theta = mgh$ où θ est l'inclinaison par rapport à l'horizontale.

ii. $\dot{s}_C = -h \sqrt{\frac{2mgh}{J_C + mh^2}} \mathbf{e}_z$ où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire dans la direction verticale.

[90]

i. $\theta = 0, \varphi = 0$ et $\theta = 0, \varphi = \pi$

ii. Mouvement périodique si le rapport des pulsations propres $|\omega|$ est un rationnel, où

$$\omega^4 - g \left(\frac{7}{a} + \frac{6}{b} \right) \omega^2 + \frac{6g^2}{ab} = 0.$$

[91]

i. $\theta = 0, x = \frac{mg}{k}$ et $\theta = \pi, x = \frac{mg}{k}$

où x mesure le déplacement vertical de O à partir de la longueur naturelle du ressort.

ii. $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{4\ell}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

[92]

$$\tan \theta_* = -\frac{a}{g}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_C + mh^2}{mh\sqrt{g^2 + a^2}}}$$

[97]

$$\frac{7}{10}(b-a)\dot{\theta}_{\text{abs}}^2 + g(1 - \cos \theta_{\text{abs}}) = \frac{7}{10}(b-a) \left(\frac{w}{b-a} + \Omega \right)^2 \quad \text{où } \theta_{\text{abs}} = 0 \text{ en } t = 0.$$

$$\theta_{\text{rel}} = \theta_{\text{abs}} - \Omega t$$

[98]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(9\pi - 16)a}{8g}}$$

[99]

$$\text{tg } \theta_0 = 3\mu$$

[100]

- i. $\theta_{\text{eq}} = \arctg(\alpha/g)$, stable
- ii. $\theta_{\text{max}} = 2 \arctg(\alpha/g)$. La boule quitte le patin si $\alpha > g$.
- iii. La boule atteint $\theta_{\text{max}} = \pi/3$ sans décoller.
- iv. $\alpha \leq \frac{5}{2} \mu_S g$

[101]

- i. $v_0 = R\omega_0$
- ii. $\mu > \text{tg } \alpha$
- iii. $t_* = \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}$ si $\text{tg } \alpha < 3\mu$

[102]

- i. $F_0 = \frac{mga \sin \alpha}{a+b}$, $\text{tg } \alpha \leq \frac{a+b}{b} \mu$
- ii. $\ddot{x} = \frac{Fa(a+b) - mga^2 \sin \alpha}{J_C + ma^2}$
- iii. $b = \frac{J_C}{ma}$, $\text{tg } \alpha \leq \left(1 + \frac{ma^2}{J_C}\right) \mu$

[103]

- i. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a-d)^2 + J_C}{mgd}}$
- ii. $h = a - d + \frac{J_C}{m(a-d)}$. On notera que $\mathbf{M}_C^F = F[d(1 - \cos \theta) - \ell] \mathbf{k}$ où $\ell = h + d - a$.

[104]

- i. $v_* = \sqrt{\frac{2g(R-a)(1 - \sin \theta_0)}{1+k}}$, $\omega_* = -\frac{v_*}{a}$ où $\omega = \omega_* \mathbf{k}$
- ii. $t_e = \frac{2v_*}{\mu g \left(1 + \frac{9}{k}\right)}$, $v_e = v_* + \frac{2v_*}{1 + \frac{9}{k}}$

[108]

i. $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$

$$2\ddot{x}\cos\varphi + a\ddot{\varphi} + 2g\sin\varphi = 0$$

$$\dot{x}^2 + \frac{1}{4}a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}a\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ga\cos\varphi = 0$$

où x et θ mesurent respectivement la translation et la rotation du disque tandis que φ est l'angle formé par CP avec la verticale inférieure.

ii. Oscillations périodiques de P entre les positions horizontales de part et d'autre de C.

[109]

$$\dot{\theta}^2 \left[\frac{R-a}{2} \left(\frac{7}{5} - \frac{m}{m+M} \cos^2\theta \right) \right] - g\cos\theta = -g\cos\theta_0$$

Oscillations de la sphère sur le bloc entre les angles $\pm\theta_0$.

$$x_{\max} = 2\frac{m}{m+M}(R-a)\sin\theta_0$$

[110]

ii. Équilibre marginalement stable pour $x = 0, \theta = 0$ et équilibre instable pour $x = 0, \theta = \pi$.

[111]

i. $a\omega = 2(a+R)\dot{\theta}$

ii. $(8M+3m)(a+R)\dot{\theta}^2 - 4mg\cos\theta = 0$

iii. Oscillations périodiques avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

iv. $\|\mathbf{v}_C\| = \sqrt{\frac{4mg(a+R)}{8M+3m}}$

[112]

i. $x(t) = -\mu g \frac{m+M}{2M} t^2 + v_0 t + x_0$

ii. $t_* = \frac{v_0}{\mu g} \left(1 + \frac{m}{M} + \frac{ma^2}{J_C} \right)^{-1}$

iii. $\dot{X} = v_0 \left(1 + \frac{M}{m} + \frac{Ma^2}{J_C} \right)^{-1}$

[113]

i. $\dot{x} - a\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$ où φ mesure la rotation absolue du disque autour de son centre d'inertie dans le même sens que θ .

ii. $\frac{3}{2}(a\ddot{\theta} - \ddot{x}) + x\dot{\theta}^2 = g\sin\theta$
 $\left(\frac{M\ell^2}{12} + \frac{3}{2}ma^2 \right) \ddot{\theta} - \frac{3}{2}ma\ddot{x} + \frac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta$

iii. $x = 0, \theta = 0$, configuration d'équilibre instable.

[114]

i. $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0, \dot{y}\sin\alpha = \dot{x}\cos\alpha - a\dot{\theta}, \dot{y}\cos\alpha = -\dot{x}\sin\alpha$

ii. $N_A = (m + M)g$, $T_A = -Mg \tan(\alpha/2)$, $N_B = Mg$, $T_B = -Mg \tan(\alpha/2)$

iii. $\ddot{x} = \frac{4g}{9\sqrt{3}}$

[115]

i. $\ddot{x} \cos \varphi + \ell \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$, $(2M + m)\ddot{x} + m\ell \ddot{\varphi} \cos \varphi - m\ell \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0$
où x mesure la translation horizontale de la roue et φ l'angle du pendule par rapport à la verticale inférieure.

ii. $(x, \varphi) = (x_0, 0)$ quel que soit x_0

iii. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2M}{2M + m}} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

iv. $(\varphi_0)_{\max} = 2\mu \frac{M + m}{m}$

[116]

i. $\mathbf{H}_C = \mathbf{H}_0$; $T_C = T_0 = \frac{9}{2} A \sigma^2$

ii. $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{H}_0}{\|\mathbf{H}_0\|}$; $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \frac{2T_0}{\|\mathbf{H}_0\|} = \text{constante}$

L'extrémité de $\boldsymbol{\omega}$ appartient donc à un plan fixe perpendiculaire à $\mathbf{k}$.

iv. Mouvement limite instable avec $\omega_{1_\infty} = 0$, $\omega_{2_\infty} = \frac{3\sigma}{\sqrt{5}}$ et $\omega_{3_\infty} = 0$.

[119]

Précession de signe variable.

[120]

Toupie forte.

[121]

Mouvement avec rebroussement.

[126]

$\dot{\theta} = \Omega$; $z - z_0 = \frac{5g}{2\Omega^2} \left[\cos \left(\sqrt{\frac{2}{7}} \Omega t \right) - 1 \right]$

où θ et z sont les coordonnées cylindriques du centre d'inertie de la sphère.

[127]

i. $\dot{\theta}^2 - 4kn\omega \cos \theta + \frac{2g}{a} \sin \theta = C$

$\dot{\psi} + \omega \cos \theta = n$

ii. Oscillations de période $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ si $C < 2\alpha$

où $\alpha = \sqrt{\frac{g^2}{a^2} + 4k^2 n^2 \omega^2}$

[128]

Oscillations pendulaires autour de la position inférieure.

Pas de rotation autour de la verticale.