Formule de Poisson
Dérivation dans des axes mobiles

É.J.M. Delhez

September 16, 2011

Formule de Newton

Pour un point matériel - être sans volume mais doté d'une masse - dans un référentiel d'inertie, on a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

- $\mathbf{F}$ = résultante des forces (?)
- m = masse (?)
- $\mathbf{a}$ = accélération

Loi expérimentale = axiome de la mécanique Newtonienne

Position, vitesse accélération

Dans un *système de référence* = origine + trièdre de référence, idéalement matérialisé par un solide indéformable ou tout autre système matériel ad-hoc,

- $\mathbf{s}(t)$ = vecteur position
- $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{s}}{dt} = \dot{\mathbf{s}}(t)$ = vecteur vitesse
- $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{s}}(t)$ = vecteur accélération

Coordonnées généralisées

En coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{s} = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3 = \mathbf{s}(x, y, z)$$

En coordonnée cylindriques : $\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z = \mathbf{s}(r, \theta, z)$

En général : $\mathbf{s} = \mathbf{s}(q_1, q_2, q_3, t)$

$$\left.\begin{array}{c} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Loi du mouvement : } \mathbf{s} = \mathbf{s}(t) \text{ et trajectoire}$$

Repère local de Frenet

- $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{s}}{d\lambda}$, $\quad \left\| \dfrac{d\mathbf{s}}{d\lambda} \right\| = 1$ par définition de λ.
- $\boldsymbol{\nu} = \rho \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda}$ où $\dfrac{1}{\rho} = \left\| \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda} \right\|$
- $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{\nu}$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\lambda(t)), \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}\,\boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\lambda}\,\boldsymbol{\tau} + \dot{\lambda}\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \ddot{\lambda}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{\lambda}^2}{\rho}\,\boldsymbol{\nu}$$

Dérivée relative

BUT = Relier les vitesses et accélérations dans des référentiels différents.

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{r}(t)$$

Rem : t est absolu !

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{s}}{dt}}_{= \text{Vitesse pour O}} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\neq \text{Vitesse pour O'}}$$

Dérivée relative (2)

$$\mathbf{s}(t) = \sum_i X_i(t)\,\mathbf{E}_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{O}}(t) = \sum_i \dot{X}_i(t)\,\mathbf{E}_i = \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\mathrm{O}}$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_i x_i(t)\,\mathbf{e}_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{O}'}(t) = \sum_i \dot{x}_i(t)\,\mathbf{e}_i = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathrm{O}'}$$

Pour O, $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t)$ et

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathrm{O}} \neq \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathrm{O}'}, \qquad \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathrm{O}} \neq \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathrm{O}'} = \mathbf{0}$$

Dérivée relative (3)

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathrm{O}} = \sum_j \Omega_{ij}\mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathrm{O}} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i \cdot \left(\frac{d\mathbf{e}_k}{dt}\right)_{\mathrm{O}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_{ik} + \Omega_{ki} = 0$$

Ω_{ij} = Composantes d'un tenseur antisymétrique,
i.e. défini par 3 composantes non nulles $\sim$ vecteur

Vecteur de Poisson ω

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathrm{O}} = \sum_j \Omega_{ij}\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_i x_i(t)\ \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathrm{O}} &= \sum_i \dot{x}_i(t)\ \mathbf{e}_i + \sum_i x_i(t)\ \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathrm{O}} \\ &= \sum_i \dot{x}_i(t)\ \mathbf{e}_i + \sum_i x_i(t)\ \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i \\ &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathrm{O'}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\end{aligned}$$

Formule de Poisson

$$\left(\frac{d\,\cdot}{dt}\right)_{\mathrm{O}} = \left(\frac{d\,\cdot}{dt}\right)_{\mathrm{O'}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \cdot$$

Lorsque O est absolu et O' en mouvement :

$$\dot{} = \frac{\delta}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge$$

Cas particuliers :

- $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} = \dfrac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t}$
- $\dot{\alpha} = \dfrac{\delta \alpha}{\delta t}$

Signification

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos\theta\, \mathbf{E}_1 + \sin\theta\, \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}_2 = -\sin\theta\, \mathbf{E}_1 + \cos\theta\, \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3 \end{cases}$$

Par dérivation directe

Par la formule de Poisson

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\theta}\ \sin\theta\, \mathbf{E}_1 + \dot{\theta}\ \cos\theta\, \mathbf{E}_2 = \dot{\theta}\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1$$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\, \mathbf{e}_3$: Vitesse angulaire $\times$ axe de rotation

Vit. relative et d'entraînement

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} + \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

- Vitesse d'entraînement : $\mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$
- Vitesse relative : $\mathbf{v}_r = \dfrac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$

Décomp. de l'accélération

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathrm{O}} \left[\dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} + \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}\right] \\
&= \ddot{\mathbf{b}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{\delta}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}\wedge\right) \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \\
&= \ddot{\mathbf{b}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right) + \left(\frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}\right) \\
&= \ddot{\mathbf{b}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) + \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2}
\end{aligned}$$

Décomp. de l'accélération (2)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_a &= \ddot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \\ &= \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c\end{aligned}$$

- Acc. d'entraînement : $\mathbf{a}_e = \ddot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}$
- Acc. relative : $\mathbf{a}_r = \dfrac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2}$
- Acc. de Coriolis : $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dfrac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$

Coord. cylindriques

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= \dot r\,\mathbf{e}_r + \dot z\,\mathbf{e}_z + r\,\dot{\mathbf{e}}_r = \dot r\,\mathbf{e}_r + \dot z\,\mathbf{e}_z + r\,\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e}_r \\ &= \left[\dot r\,\mathbf{e}_r + \dot z\mathbf{e}_z\right] + r\,\dot\theta\,\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}_r = \left[\dot r\,\mathbf{e}_r + \dot z\mathbf{e}_z\right] + r\,\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

$\approx$ Vitesse relative

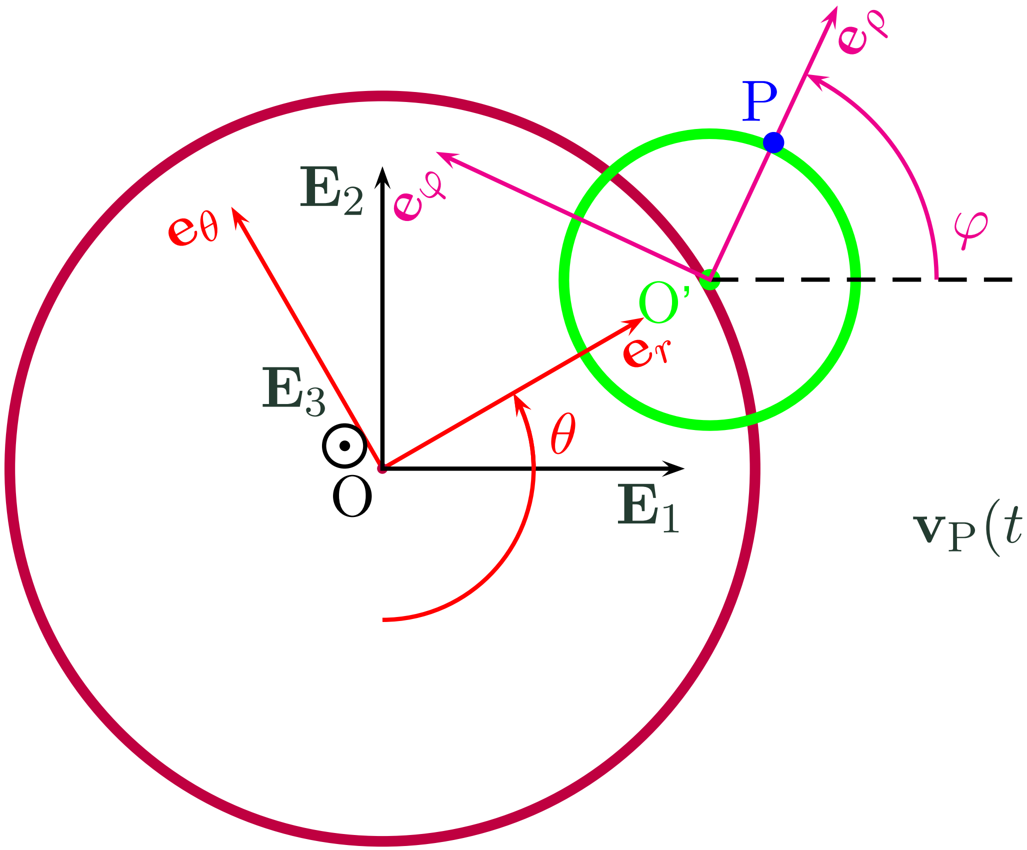
Vitesse d'entraînement

Coord. cylindriques (2)

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{s}} &= \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\,\dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z \\
&= \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r + (\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z \\
&= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z \\
&= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Application



$\mathbf{s}_\mathrm{P}(t) = ?$

$\mathbf{v}_\mathrm{P}(t) = ?$

$\mathbf{s}_\mathrm{P}(t) = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\rho$

$\mathbf{a}_\mathrm{P}(t) = ?$

$$\mathbf{v}_\mathrm{P}(t) = a\dot{\mathbf{e}}_r + b\dot{\mathbf{e}}_\rho$$

$$= a\dot{\theta}\,\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_r + b\dot{\varphi}\,\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_\rho$$

$$= a\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + b\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$

$\|\mathbf{OO'}\| = a,\ \|\mathbf{O'P}\| = b$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\mathrm{P} &= a\,\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + b\,\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + a\,\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{e}}_\theta + b\,\dot{\varphi}\,\dot{\mathbf{e}}_\varphi \\ &= a\,\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + b\,\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + a\,\dot{\theta}^2\mathbf{E}_3 \wedge\ \mathbf{e}_\theta + b\,\dot{\varphi}^2\,\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_\varphi \\ &= a\,\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + b\,\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi - a\,\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r - b\,\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_\rho\end{aligned}$$