LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2025

MATH0003 - MÉCANIQUE RATIONNELLE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Exprimez en français ce que sont les équations d'Euler.
ii. Établissez l'expression des équations d'Euler en partant du ou des théorèmes fondamentaux appropriés. Donnez la signification de toutes les grandeurs intervenant dans ces équations.
iii. En utilisant les équations d'Euler, montrez que le vecteur de Poisson d'un solide possédant un axe de symétrie de révolution reste constant en norme au cours du mouvement si le solide est soumis à la seule force de pesanteur.

Question II

Au terme d'une journée estivale très chaude, les étudiants de l'école d'été de BEST s'engagent dans un concours de lancer de glaçons. Sous la chaleur, les glaçons fondent selon la loi

$$m(t) = m_0 \exp(-\alpha t)$$

où m_0 et α sont des constantes strictement positives.

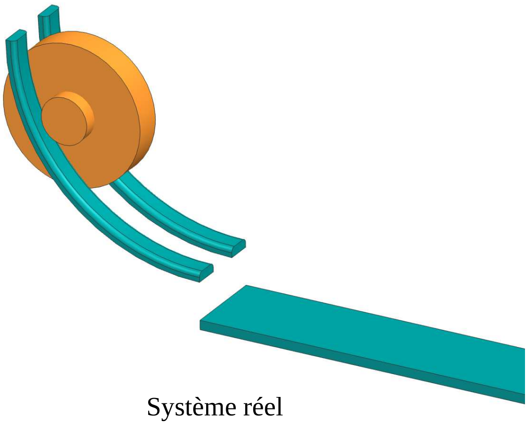
Afin de pouvoir optimiser les conditions du lancer, on demande d'écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement d'un glaçon de masse $m(t)$ assimilé à un point matériel et de déterminer la loi du mouvement correspondante. On considère que le glaçon est lancé dans le champ de la pesanteur à partir d'une position $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. On supposera que l'eau et la vapeur d'eau résultant de la fonte du glaçon possèdent une vitesse absolue nulle.

Question III

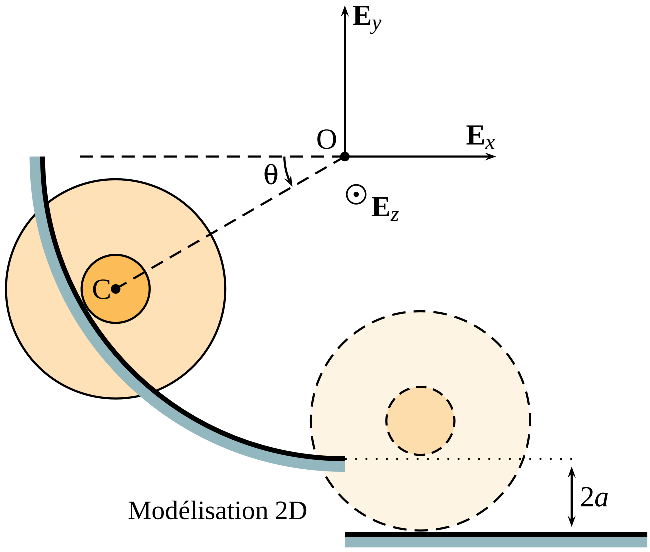
On considère un mobile homogène de masse m constitué d'un cylindre principal de rayon $3a$ sur lequel sont fixés symétriquement deux cylindres concentriques de rayon a qui permettent au mobile de s'appuyer sur un double rail en forme de quart de cercle de rayon R qui lui sert de rampe de lancement. Le moment central d'inertie J_C du mobile par rapport à son axe de symétrie de révolution vaut kma^2.

Le système est modélisé sous l'hypothèse du mouvement plan en assimilant le double rail à un rail unique sur lequel le contact est ponctuel (Modélisation 2D).

Le mobile est initialement abandonné sans vitesse alors que son centre d'inertie fait un angle θ_0 par rapport à l'horizontale. Dans un premier temps, on étudie le roulement sans glissement du mobile sur le rail en forme de quart de cercle.



Système réel



Modélisation 2D

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du mobile et introduisez les coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement.

ii. Déterminez la condition de roulement sans glissement du mobile sur le rail.

iii. Relevez toutes les forces agissant sur le mobile en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/de liaison, force conservative).

iv. Écrivez[*] le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertiel et déduisez-en une intégrale première dont vous donnerez la signification physique.

v. Déterminez la vitesse du centre d'inertie du disque et sa vitesse de rotation autour de son centre d'inertie au moment où il atteint le bas du rail. Ces deux vitesses sont notées respectivement $v_\star \mathbf{E}_x$ et $\omega_\star \mathbf{E}_z$ dans la suite du problème.

Lorsqu'il atteint le bas du rail, le mobile continue sa route sur un plan horizontal rugueux (coefficient de frottement μ) situé à une distance $2a$ sous le rail (voir figure). Le mobile est alors en contact avec le plan horizontal via le cylindre de rayon $3a$. L'hypothèse du mouvement plan est toujours valable dans cette deuxième phase du mouvement.

vi. Introduisez des coordonnées généralisées permettant de décrire le mouvement du mobile sur le plan horizontal.

vii. Exprimez, en fonction des vitesses $v_\star$ et $\omega_\star$ et des paramètres du problème, la vitesse du point du mobile en contact avec le plan horizontal au moment où le mobile touche le plan et déterminez si le mouvement initial du mobile sur le plan horizontal est un roulement avec ou sans glissement.

viii. Relevez toutes les forces agissant sur le mobile en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/de liaison, force conservative).

ix. Écrivez[*] le théorème de la quantité de mouvement.

x. Écrivez[*] le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du mobile et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels.

xi. Donnez un système d'équations comportant autant d'équations que d'inconnues permettant d'étudier le mouvement dans cette deuxième phase.

xii. Montrez que la vitesse du centre d'inertie du mobile se stabilise à une valeur constante $v_e > v_\star$ après un temps fini t_e (mesuré à partir du moment où le mobile touche le plan horizontal). Déterminez la vitesse v_e et le temps t_e en fonction des paramètres du problème et des vitesses $v_\star$ et $\omega_\star$.

---

[*] Explicitez les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu.

Question I

Voir livre de référence.

Question II

L'équation différentielle décrivant le mouvement d'un glaçon s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ désigne la poussée résultant de la variation de la masse du glaçon et $\mathbf{s}$ le vecteur position du centre d'inertie du glaçon par rapport au point fixe O.

La masse du glaçon varie selon la loi $m(t) = m_0 \exp(-\alpha t)$. La vitesse absolue de l'eau et la vapeur d'eau résultant de la fonte du glaçon étant nulle, on a $\mathbf{w} + \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$. On calcule dès lors

$$\mathcal{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{w} = -\alpha m_0 \exp(-\alpha t)(-\dot{\mathbf{s}}) = \alpha m \dot{\mathbf{s}}$$

L'équation différentielle du mouvement devient donc

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \alpha m \dot{\mathbf{s}}$$

ou encore

$$\ddot{\mathbf{s}} - \alpha\,\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène dont la solution générale peut être exprimée comme la somme de la solution générale de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_h + \mathbf{s}_p$$

D'une part, le polynôme caractéristique de l'équation homogène s'écrit $z^2 - \alpha z = z(z-\alpha)$ et possède les deux zéros simples $z = 0$ et $z = \alpha$ de sorte que

$$\mathbf{s}_h = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\, \mathrm{e}^{\alpha t}$$

où $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont des constantes.

D'autre part, on identifie facilement une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$\mathbf{s}_p = -\frac{\mathbf{g}\,t}{\alpha}$$

de sorte que

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{\mathbf{g}\,t}{\alpha}$$

Les constantes peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$ et $\dot{\mathbf{s}}(0) = \mathbf{v}_0$, ce qui donne

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \alpha\mathbf{C}_2 - \frac{\mathbf{g}}{\alpha} = \mathbf{v}_0$$

et donc

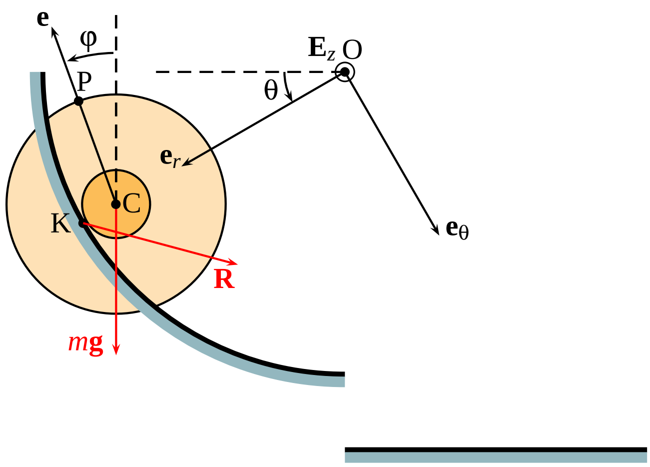
$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_2 = -\frac{\mathbf{v}_0}{\alpha} - \frac{\mathbf{g}}{\alpha^2}$$

Finalement, la loi du mouvement s'écrit

$$\mathbf{s} = \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\alpha} + \frac{\mathbf{g}}{\alpha^2}\right)(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1) - \frac{\mathbf{g}\,t}{\alpha}$$

Question III

Adoptant le centre du rail comme origine du repère absolu, on peut représenter le problème comme ci-dessous.



i. Le mobile est un solide en mouvement plan. Il possède donc au maximum 3 ddl. Le contact avec le rail et la condition de roulement sans glissement constituent deux liaisons de sorte que le mobile ne possède qu'un seul degré de liberté.

   Pour décrire son mouvement, on introduit l'angle θ qui mesure la position du centre d'inertie par rapport à l'horizontale et l'angle φ qui mesure la rotation autour de son centre d'inertie (voir figure). Ces deux variables sont liées par la condition de roulement sans glissement.

ii. Le roulement sans glissement se traduit par la condition

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{mobile}} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{rail}}$$

   où $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{rail}} = \mathbf{0}$ puisque le rail est fixe.

   Le vecteur position d'un point matériel quelconque du pourtour du mobile est donné par

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}} = (R-a)\mathbf{e}_r + a\mathbf{e}$$

   et sa vitesse par

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = (R-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\omega \wedge \mathbf{e}$$

   où $\omega = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z$ est le vecteur de Poisson du mobile. Considérant en particulier la vitesse du point matériel en contact avec le rail en K, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = (R-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}_r = (R-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{e}_\theta$$

   de sorte que la condition de roulement sans glissement se traduit par la relation

$$(R-a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0 \tag{1}$$

iii. Les forces agissant sur le mobile sont

   - la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force conservative appliquée au centre d'inertie du mobile et dirigée verticalement vers le bas ;
   - la force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$ appliquée en K et de direction inconnue dans le plan du mouvement.

iv. Le théorème de l'énergie cinétique en O s'écrit

$$\dot{T}_{\mathrm{O}} = P_{\mathrm{O}}$$

   où

$$P_{\mathrm{O}} = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} + m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = -\frac{dV_{mg}}{dt}$$

puisque $\dot{\mathbf{s}}_K = \mathbf{0}$ en vertu de la condition de roulement sans glissement et que la force de pesanteur est conservative. On obtient alors l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$T_O + V_{mg} = E$$

où

$$V_{mg} = -mg(R-a)\sin\theta$$

et

$$\begin{aligned} T_O &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_C\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kma^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Dès lors, l'intégrale première s'écrit

$$\frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kma^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-a)\sin\theta = E$$

où la constante E peut être déterminée en utilisant les conditions initiales (repos en $\theta = \theta_0$), soit

$$\frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kma^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-a)\sin\theta = -mg(R-a)\sin\theta_0 \tag{2}$$

v. Au moment où le mobile atteint le bas du rail où $\theta = \pi/2$, sa vitesse s'écrit

$$\dot{\mathbf{s}}_C = (R-a)\dot{\theta}\mathbf{E}_x = v_*\mathbf{E}_x$$

et son vecteur de Poisson

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z = \omega_*\mathbf{E}_z$$

La valeur de $\dot{\theta}$ en $\pi/2$ s'obtient en éliminant φ de l'équation (2) grâce à la condition de roulement sans glissement. On a

$$\frac{1}{2}(R-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}(R-a)^2\dot{\theta}^2 - g(R-a)\sin\theta = -g(R-a)\sin\theta_0$$

soit

$$\frac{1}{2}(1+k)(R-a)^2\dot{\theta}^2 - g(R-a)\sin\theta = -g(R-a)\sin\theta_0$$

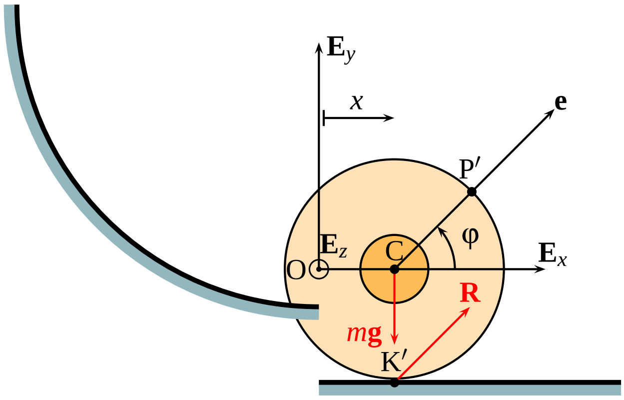
de sorte que

$$v_* = (R-a)\left[\dot{\theta}\right]_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2g(R-a)(1-\sin\theta_0)}{1+k}}$$

où $v_* > 0$ vu la configuration étudiée. La vitesse de rotation correspondante s'obtient grâce à la condition de roulement sans glissement. On a

$$\omega_* = [\dot{\varphi}]_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{(R-a)}{a}\left[\dot{\theta}\right]_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{v_*}{a} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2g(R-a)(1-\sin\theta_0)}{1+k}}$$

Adoptant comme origine du repère absolu dans cette deuxième phase du mouvement la position du centre d'inertie du mobile à l'instant où celui-ci touche le plan horizontal, on peut représenter le problème comme ci-dessous.



vi. Dans cette deuxième phase du mouvement, la coordonnées θ repérant la position du centre d'inertie du mobile est remplacée par la coordonnée x mesurant son déplacement selon l'axe $\mathbf{E}_x$. L'angle φ décrit encore la rotation du mobile autour de son centre d'inertie.

vii. Calculons la vitesse du point du mobile en contact avec le plan horizontal au moment où le mobile touche le plan. Le vecteur position d'un point matériel quelconque du pourtour du mobile est donné par

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}'} = x\mathbf{E}_x + 3a\mathbf{e}$$

et sa vitesse par

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}'} = \dot{x}\mathbf{E}_x + 3a\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}$$

où $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z$ est le vecteur de Poisson du mobile. Considérant en particulier la vitesse du point matériel en contact avec le rail en K′, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'} = \dot{x}\mathbf{E}_x + 3a\dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge (-\mathbf{E}_y) = (\dot{x} + 3a\dot{\varphi})\mathbf{E}_x$$

Au moment où le mobile touche le plan horizontal, $\dot{x} = v_*$ et $\dot{\varphi} = \omega_*$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'} = (v_* + 3a\omega_*)\mathbf{E}_x$$

En vertu du roulement dans glissement dans la première phase, on a $v_* + a\omega_* = 0$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'} = (v_* - 3v_*)\mathbf{E}_x = -2v_*\mathbf{E}_x \neq \mathbf{0}$$

Le mouvement initial du mobile sur le plan horizontal est donc un roulement avec glissement.

viii. Les forces agissant sur le mobile sont

- la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force conservative appliquée au centre d'inertie du mobile et dirigée verticalement vers le bas ;
- la force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$ appliquée en K′ et de direction inconnue dans le plan du mouvement.

ix. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = \mathbf{G}$$

soit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = m\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où $\mathbf{s}_{\mathrm{C}} = x\mathbf{E}_x$, donc

$$m\ddot{x}\mathbf{E}_x = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$$

Les projections de ce théorème sur les axes $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$ donnent

$$m\ddot{x} = T \tag{3}$$

$$N = mg \tag{4}$$

x. L'application du théorème du moment cinétique dans un système d'axes centrés au centre d'inertie et parallèles à des axes inertiels conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}}$$

où

$$\mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \omega = kma^2 \dot{\varphi}\, \mathbf{E}_z$$

et

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}} = -3a\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R} = -3a\mathbf{E}_y \wedge (N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x) = 3aT\mathbf{E}_z$$

Dès lors,

$$kma^2 \ddot{\varphi}\, \mathbf{E}_z = 3aT\mathbf{E}_z$$

soit

$$kma\ddot{\varphi} = 3T \tag{5}$$

xi. Les équations (3), (4) et (5) doivent être complétées par une quatrième équation pour pouvoir déterminer les 4 inconnues x, φ, N et T. Puisque le mobile glisse, c'est la loi du frottement qui constitue cette quatrième équation. On a

$$\mathbf{T} = T\mathbf{E}_x = -\mu |N| \frac{\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'}}{\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'}\|} = -\mu\, mg \operatorname{sgn}(\dot{x} + 3a\dot{\varphi})\mathbf{E}_x$$

Au début de la deuxième phase, $\dot{x} + 3a\dot{\varphi} = -2v_* < 0$. On a donc

$$T = \mu\, mg \tag{6}$$

xii. Éliminant T dans l'équation (3) grâce à l'équation (6), on obtient

$$m\ddot{x} = \mu\, mg$$

de sorte que

$$\dot{x} = \mu\, gt + v_*$$

où on a tenu compte de la condition initiale $\dot{x} = v_*$.
L'équation (5) donne quant à elle

$$kma\ddot{\varphi} = 3\mu\, mg$$

de sorte que

$$\dot{\varphi} = \frac{3\mu\, g}{ka} t + \omega_*$$

où on a tenu compte de la condition initiale $\dot{\varphi} = \omega_*$.
Le mobile arrête de glisser quand la condition de roulement sans glissement sur la rail horizontal est vérifiée, c'est-à-dire quand

$$\dot{x} + 3a\dot{\varphi} = 0$$

ou encore, en introduisant les expressions des vitesses obtenues ci-dessus, quand

$$\mu\, gt + v_* + \frac{9}{k}\mu\, gt + 3a\omega_* = 0$$

Une phase de roulement sans glissement commence donc en $t = t_e$ où

$$t_e = -\frac{v_* + 3a\omega_*}{\mu\, g\left(1 + \dfrac{9}{k}\right)}$$

Quand le mobile roule sans glisser les équations (3), (4) et (5) restent valables. L'équation (6) doit par contre être remplacée par la condition de roulement sans glissement $\dot{x} + 3a\dot{\varphi} = 0$.
On obtient donc

$$m\ddot{x} = T = \frac{kma}{3}\ddot{\varphi} = -\frac{km}{9}\ddot{x}$$

soit

$$\ddot{x} = 0$$

On en déduit aussi $T = 0$. Puisque $N = mg$, on a donc à chaque instant

$$|T| \leq \mu |N|$$

de sorte que le mobile continue à rouler sans glisser à vitesse constante. La vitesse limite v_e du centre d'inertie vaut

$$v_e = \dot{x}(t_e) = -\mu g \frac{v_* + 3a\omega_*}{\mu g \left(1 + \frac{9}{k}\right)} + v_* = -\frac{v_* + 3a\omega_*}{1 + \frac{9}{k}} + v_* > v_\star$$