

*Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

Question I

On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe $\mathbf{e}$ en mouvement autour de son sommet O fixe.

- Exprimez la forme particulière prise par le tenseur d'inertie de la toupie en O en raison de sa géométrie en ne faisant pas apparaître d'autre vecteur que $\mathbf{e}$. Justifiez.
- Exprimez vectoriellement le théorème du moment cinétique rapporté à des axes fixes centrés en O.
- Déterminez, sans introduire de coordonnées généralisées, deux intégrales premières scalaires du théorème écrit en ii. et donnez-en la signification physique.

Question II

On considère le mouvement d'un point matériel P de masse m soumis de la part d'un point fixe O à une force centrale attractive

$$\mathbf{F} = -\mu r^{-3} \mathbf{e}_r$$

où μ désigne une constante strictement positive, r est la distance entre le point O et le point P et $\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire porté par $\mathbf{OP}$.

À l'instant initial, le point matériel est situé à une distance r_0 de O et est animé d'une vitesse $\mathbf{v}_0$ non nulle perpendiculaire au vecteur $\mathbf{e}_r$.

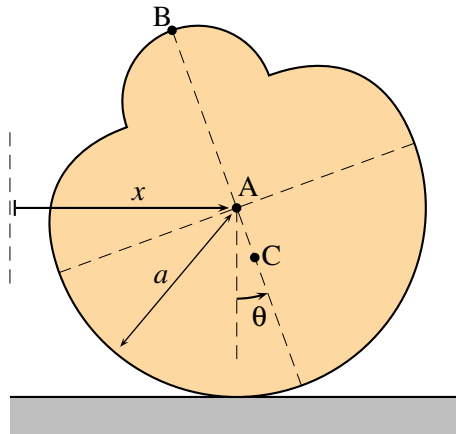
- Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de P.
- Montrez que le mouvement du point matériel est plan.
- Déterminez deux intégrales premières scalaires du mouvement ainsi que leur interprétation physique.
- Discutez la nature du mouvement sur un diagramme de potentiel en fonction des paramètres du problème.
- Déterminez, sans la résoudre, une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la trajectoire $r(\theta)$ du point matériel en coordonnées polaires dans le plan du mouvement.
- Dans le cas où $\mu = 2r_0^2 v_0^2$, montrez que le point matériel décrit la trajectoire $r(\theta) = \frac{r_0}{\text{ch}(n\theta)}$ où $\theta = 0$ à la position initiale et où n est à déterminer. Montrez que cette trajectoire est en accord avec le résultat obtenu au point iv.

Question III

On considère le mouvement plan d'un solide non homogène de masse m dont le centre d'inertie C est situé sur l'axe de symétrie du solide à une distance h sous le centre A du demi-disque de rayon a dont est constituée la base (voir figure). Le solide roule sans glisser sur un plan horizontal fixe. Le contact est ponctuel et le coefficient de frottement entre le solide et le plan est noté μ . Le moment central d'inertie du solide par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement est noté J_C .

On repère la position du solide par la coordonnée x mesurant le déplacement horizontal du point A et l'angle θ mesurant l'inclinaison de l'axe de symétrie (voir figure).

À l'instant initial, le solide est lâché sans vitesse alors que son axe de symétrie présente une inclinaison θ_0 .



- i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du solide et donnez les coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement.
- ii. Exprimez les vitesses des points A , B (situé sur l'axe de symétrie à une distance ℓ de A) et C en fonction des coordonnées généralisées.
- iii. Déterminez la condition de roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal.
- iv. Relevez toutes les forces agissant sur le solide en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/de liaison, force conservative).
- v. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement.
- vi. Écrivez* le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré en C et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels.
- vii. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertiel et déduisez-en une intégrale première ne faisant intervenir que la variable θ . Précisez l'interprétation physique de cette intégrale première.
- viii. Déterminez la période des petites oscillations du solide autour de $\theta = 0$.
- ix. Dans l'hypothèse des petites oscillations, déterminez la valeur maximale de θ_0 pour que le mouvement du solide soit compatible avec l'hypothèse du roulement sans glissement.
- x. Dans la configuration étudiée, l'axe de symétrie du solide est en équilibre stable quand $\theta = 0$. Serait-ce toujours le cas si le centre d'inertie se trouvait sur l'axe de symétrie du solide à une distance h **au-dessus** du point A ? Justifiez mathématiquement.

* Explicitiez les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu.

SOLUTION

Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} = -\mu m r^{-3} \mathbf{e}_r$$

où $\mathbf{s} = \mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r$ est le vecteur position de P par rapport au centre de force O. En simplifiant par la masse m , on obtient

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\mu r^{-3} \mathbf{e}_r$$

ii. Multipliant cette équation vectoriellement par $\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r$, on obtient

$$\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

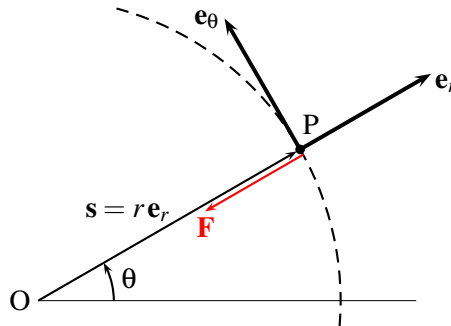
soit

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur constant $\mathbf{h}$ comprenant le point O puisque, à tout instant,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = 0$$

iii. Le mouvement étant plan, on peut le décrire en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.



L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = -\mu r^{-3} \mathbf{e}_r$$

Projetant cette équation dans les directions radiale et tangentielle, on obtient

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mu r^{-3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0$$

De la seconde équation, on tire une première intégrale première qui exprime la conservation du moment cinétique (par unité de masse) et qui s'écrit

$$r^2 \dot{\theta} = h$$

Les conditions initiales

$$\mathbf{s}_0 = r_0 \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{r}_0 \mathbf{e}_r + r_0 \dot{\theta}_0 \mathbf{e}_\theta = v_0 \mathbf{e}_\theta$$

permettent d'identifier les paramètres initiaux

$$\dot{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad r_0 \dot{\theta}_0 = v_0$$

et de déterminer la constante d'intégration apparaissant dans l'intégrale première de conservation du moment cinétique. On a

$$r^2 \dot{\theta} = h = r_0 v_0 \quad (2)$$

Éliminant $\dot{\theta}$ de (1) en utilisant (2), on obtient

$$\ddot{r} - r_0^2 v_0^2 r^{-3} + \mu r^{-3} = 0$$

En multipliant par $\dot{r}$ et en intégrant, il vient

$$\dot{r}^2 + r_0^2 v_0^2 r^{-2} - \mu r^{-2} = C = v_0^2 - \mu r_0^{-2} \quad (3)$$

où la constante a été déterminée en considérant les conditions initiales. Cette seconde intégrale première exprime la conservation de l'énergie (par unité de masse) de la particule.

- iv. Le mouvement de la particule peut être étudié sur un diagramme de potentiel en se basant sur l'intégrale première (3) écrite sous la forme

$$\dot{r}^2 + \mathcal{V}(r) = C = v_0^2 - \mu r_0^{-2}$$

où

$$\mathcal{V}(r) = (r_0^2 v_0^2 - \mu) r^{-2}$$

On a

$$\mathcal{V}'(r) = -2(r_0^2 v_0^2 - \mu) r^{-3}$$

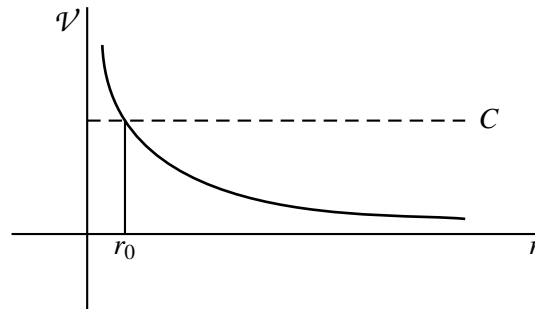
de sorte que 3 cas peuvent se présenter en fonction du signe de $\mu - r_0^2 v_0^2$ qui aussi celui de $\mathcal{V}'(r)$.

Les conditions initiales $r = r_0$ et $\dot{r}_0 = 0$ nous apprennent que la particule se trouve initialement en $r = r_0$ en un point de réflexion du diagramme de potentiel.

- $r_0^2 v_0^2 > \mu$

Dans ce cas, $\mathcal{V}$ est strictement décroissante,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \mathcal{V}(r) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(r) = 0^+$$

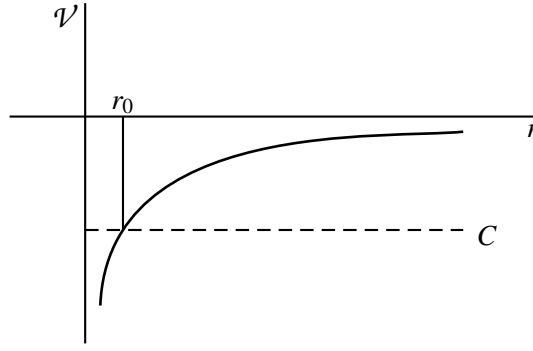


Le mouvement est non borné à l'extérieur du cercle de rayon r_0 . La trajectoire est ouverte.

- $r_0^2 v_0^2 < \mu$

Dans ce cas, $\mathcal{V}$ est strictement croissante,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \mathcal{V}(r) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(r) = 0^-$$



Le mouvement est borné à l'intérieur du cercle de rayon r_0 .

- $r_0^2 v_0^2 = \mu$

Dans ce cas, $C = 0$ et le diagramme de potentiel se réduit à la droite $V = 0$. Le point matériel décrit le cercle de rayon r_0 .

v. Faisant usage du résultat

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{r_0 v_0}{r^2}$$

dans (3), on obtient

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{r_0 v_0}{r^2}\right)^2 + r_0^2 v_0^2 r^{-2} - \mu r^{-2} = v_0^2 - \mu r_0^{-2}$$

ou encore

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2}\right) \left(r^2 - \frac{r^4}{r_0^2}\right) = 0$$

vi. Si $\mu = 2r_0^2 v_0^2$, l'équation différentielle vérifiée par la trajectoire du point matériel s'écrit

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \left(r^2 - \frac{r^4}{r_0^2}\right) = 0 \quad (4)$$

La trajectoire proposée est telle que

$$r = \frac{r_0}{\text{ch } n\theta} \quad \text{et} \quad \frac{dr}{d\theta} = -nr_0 \frac{\text{sh } n\theta}{\text{ch}^2 n\theta}$$

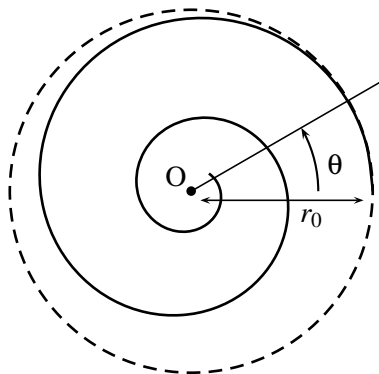
Substituant ces expressions dans (4), on obtient

$$n^2 r_0^2 \frac{\text{sh}^2 n\theta}{\text{ch}^4 n\theta} - \left(\frac{r_0^2}{\text{ch}^2 n\theta} - \frac{r_0^4}{r_0^2 \text{ch}^4 n\theta}\right) = \frac{r_0^2}{\text{ch}^4 n\theta} (n^2 \text{sh}^2 n\theta - \text{ch}^2 n\theta + 1) = 0 \quad \text{si} \quad n = 1$$

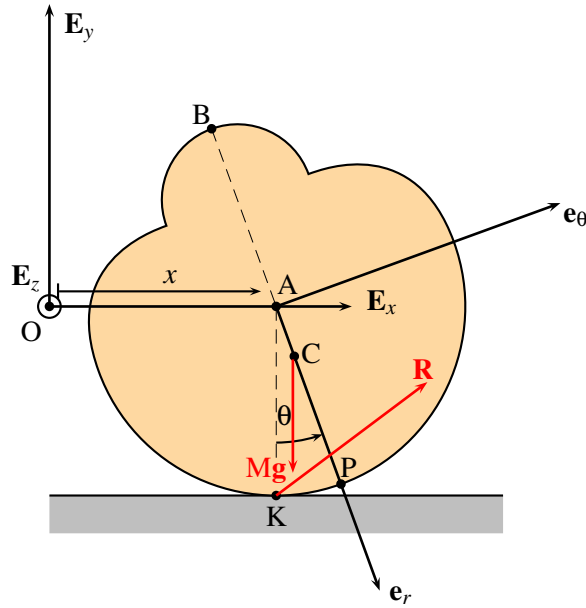
On en déduit que la trajectoire du point matériel est donnée par

$$r = \frac{r_0}{\text{ch } \theta}$$

Cette trajectoire est une spirale s'enroulant autour de l'origine à partir de la position initiale $r = r_0$, $\theta = 0$ (voir figure). Elle est située à l'intérieur du cercle de rayon r_0 conformément à ce qui a été déduit de l'étude du potentiel dans le cas $\mu = 2r_0^2 v_0^2 > r_0^2 v_0^2$. Le mouvement est borné.



Question III



- i. Le solide en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté mais le contact avec le plan horizontal et la condition de roulement sans glissement introduisent 2 liaisons. Le solide possède donc un seul degré de liberté.

Le mouvement du solide peut être décrit par les coordonnées données dans l'énoncé : la coordonnée x mesurant le déplacement horizontal du point A et l'angle θ mesurant l'inclinaison de l'axe de symétrie.

- ii. On a

$$\mathbf{s}_A = x\mathbf{E}_x ; \quad \dot{\mathbf{s}}_A = \dot{x}\mathbf{E}_x$$

et, puisque le vecteur de Poisson du solide est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$,

$$\mathbf{s}_B = x\mathbf{E}_x - \ell\mathbf{e}_r ; \quad \dot{\mathbf{s}}_B = \dot{x}\mathbf{E}_x - \ell\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{s}_C = x\mathbf{E}_x + h\mathbf{e}_r ; \quad \dot{\mathbf{s}}_C = \dot{x}\mathbf{E}_x + h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

- iii. Le roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels du solide et du plan fixe en contact au point K, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{sol}} = \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{plan}}$$

où $\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{plan}} = \mathbf{0}$ puisque le plan est fixe.

Le vecteur position d'un point quelconque du pourtour du solide, par exemple P, s'écrit

$$\mathbf{s}_P = x\mathbf{E}_x + a\mathbf{e}_r$$

et donc

$$\dot{\mathbf{s}}_P = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

En K, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{E}_y$ et $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{E}_x$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{sol}} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x = \mathbf{0}$$

Dès lors, le roulement sans glissement du solide sur le plan s'exprime par la relation

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \quad (5)$$

- iv. Les forces agissant sur le solide sont :

- $m\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;

- $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K.

v. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}$$

où

$$\mathbf{N}_O = m\dot{\mathbf{s}}_C = m(\dot{x}\mathbf{E}_x + h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = mg + \mathbf{R}$$

soit

$$m(\ddot{x}\mathbf{E}_x + h\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - h\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = mg + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x \quad (6)$$

vi. Le théorème du moment cinétique pour le solide par rapport à un système d'axes d'orientation fixe centré en son centre d'inertie s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_C \dot{\theta} \mathbf{E}_z$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= (-h\mathbf{e}_r - a\mathbf{E}_y) \wedge (T\mathbf{E}_x + N\mathbf{E}_y) = -h\mathbf{e}_r \wedge T\mathbf{E}_x - h\mathbf{e}_r \wedge N\mathbf{E}_y + aT\mathbf{E}_z \\ &= (-hT \cos \theta - hN \sin \theta + aT)\mathbf{E}_z \end{aligned}$$

En projetant le théorème sur l'axe $\mathbf{E}_z$, on obtient donc

$$J_C \ddot{\theta} = (a - h \cos \theta)T - hN \sin \theta \quad (7)$$

vii. Le théorème de l'énergie cinétique dans les axes inertiels en O s'écrit

$$\dot{T}_O = mg \cdot \dot{\mathbf{s}}_C + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_K = -\frac{d}{dt}(V_{mg})$$

puisque la force de pesanteur est conservative et que $\dot{\mathbf{s}}_K = \mathbf{0}$.

On en déduit l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$T_O + V_{mg} = E$$

L'énergie cinétique est donnée par

$$T_O = \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C$$

On calcule successivement

$$\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 = (\dot{x}\mathbf{E}_x + h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \cdot (\dot{x}\mathbf{E}_x + h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = \dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta}\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{e}_\theta = \dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$$

et

$$T_C = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2$$

ce qui donne finalement

$$T_O = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2$$

On a aussi

$$V_{mg} = -mgh \cos \theta$$

L'intégrale première s'écrit donc

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 - mgh \cos \theta = E$$

où la constante E peut être déterminée grâce aux conditions initiales $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$, soit

$$E = -mgh \cos \theta_0$$

En éliminant $\dot{x}$ grâce à la condition de roulement sans glissement (5), on obtient finalement

$$\frac{m}{2} \left(a^2 + h^2 - 2ah \cos \theta + \frac{J_C}{m} \right) \dot{\theta}^2 - mgh \cos \theta = -mgh \cos \theta_0 \quad (8)$$

- viii. Afin d'étudier les petites oscillations du solide autour de la position $\theta = 0$, il est nécessaire de dériver l'équation (8) par rapport au temps. On obtient

$$\left(a^2 + h^2 - 2ah \cos \theta + \frac{J_C}{m}\right) \ddot{\theta} + ah \sin \theta \dot{\theta}^2 + gh \sin \theta = 0$$

Les petites oscillations autour de la position d'équilibre $\theta = 0$ sont donc décrites par l'équation linéarisée

$$\left[(a-h)^2 + \frac{J_C}{m}\right] \ddot{\theta} + gh\theta = 0$$

obtenue en négligeant le terme en $\dot{\theta}^2$ et en considérant $\sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$ au voisinage de $\theta = 0$. Cette équation s'écrit sous la forme canonique

$$\ddot{\theta} + \frac{gh}{(a-h)^2 + \frac{J_C}{m}} \theta = 0 \quad (9)$$

et indique que les petites oscillations du solide se font avec une période

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gh}{(a-h)^2 + \frac{J_C}{m}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(a-h)^2 + J_C}{mgh}}$$

- ix. Le roulement sans glissement est possible si $|T| \leq \mu|N|$. Calculons donc T et N correspondant aux petites oscillations. En projetant le théorème de la quantité de mouvement (6) sur les axes $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$, on obtient

$$T = m\ddot{x} + mh\ddot{\theta} \cos \theta - mh\dot{\theta}^2 \sin \theta = -ma\ddot{\theta} + mh\ddot{\theta} \cos \theta - mh\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$N = mg + mh\ddot{\theta} \sin \theta + mh\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

où on a utilisé la condition de roulement sans glissement (5) pour exprimer $\ddot{x}$ en fonction de $\ddot{\theta}$.

Au voisinage de $\theta = 0$, on a $\sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$ et on peut négliger les termes en $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}\theta$ de sorte que

$$T \sim m(h-a)\ddot{\theta} \quad \text{et} \quad N \sim mg$$

L'équation (9) permet d'exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de θ pour de petites oscillations. Sous l'hypothèse des petites oscillations, nous obtenons donc finalement

$$N = mg$$

$$T = \frac{m^2(a-h)hg}{m(a-h)^2 + J_C} \theta$$

Il y aura roulement sans glissement à l'instant initial si

$$|T| \leq \mu|N|$$

c'est-à-dire si

$$|\theta_0| \leq \mu \frac{m(a-h)^2 + J_C}{m(a-h)h}$$

- x. Si le centre d'inertie du solide se trouve au-dessus du point A, les équations décrivant son mouvement peuvent être obtenues en remplaçant h par $-h$. Dans ce cas, l'équation (9) nous apprend que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable. En effet, dans ce cas, une petite perturbation θ_0 de l'inclinaison de l'axe de symétrie du solide autour de la position verticale augmentera exponentiellement.