

*Durée de l'épreuve : 4 heures.  
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

### Question I

On considère le mouvement d'un solide indéformable présentant une symétrie de révolution soumis uniquement à la force de pesanteur supposée uniforme.

- i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du solide. Justifiez.
- ii. Montrez que le moment résultant des forces de pesanteur par rapport au centre d'inertie du solide est nul.
- iii. Déterminez une intégrale première vectorielle et une intégrale première scalaire relatives au mouvement de rotation du solide autour de son centre d'inertie. Précisez l'interprétation de ces intégrales premières.
- iv. En exploitant les équations d'Euler

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

montrez que l'axe de symétrie du solide garde une inclinaison constante par rapport à un vecteur constant.

- v. Déterminez les conditions permettant d'assurer que l'axe de symétrie garde une direction constante au cours du mouvement.

### Question II

L'exploration spatiale serait bien différente si la force d'attraction universelle entre deux corps était inversement proportionnelle à la distance entre eux-ci. Pour le montrer, on étudie le mouvement d'un point matériel P de masse  $m$  soumis de la part d'un point fixe O à la seule force attractive

$$\mathbf{F} = -\mu m \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^2} \quad (\star)$$

où  $\mu$  désigne une constante strictement positive et où  $\mathbf{s}$  représente le vecteur position du point matériel par rapport à O.

- i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de P.
- ii. Montrez que le mouvement est plan.
- iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires et indiquez leur interprétation physique.
- iv. Discutez les différents types de mouvement sur un diagramme de potentiel.
- v. En vous basant sur le diagramme de potentiel, montrez qu'une orbite circulaire est possible et déterminez-en la période en fonction des paramètres du problème.
- vi. En considérant uniquement le cas particulier de telles trajectoires circulaires, déterminez la forme alternative que prendrait la troisième loi de Kepler si la force d'attraction universelle était de la forme  $(\star)$ .

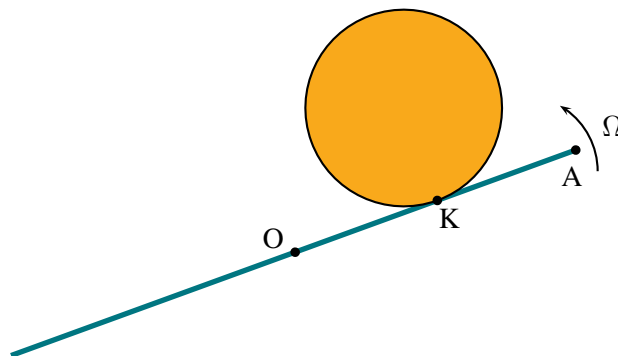
- vii. La deuxième loi de Kepler (loi des aires) serait-elle modifiée par (\*) ? Justifiez.
- viii. Expliquez en quelques mots (sans calcul) en quoi l'exploration spatiale serait différente si la force d'attraction universelle était représentée par (\*).

### Question III

On étudie le mouvement d'un disque homogène de masse  $m$  et de rayon  $a$  qui roule sans glisser sur une barre rectiligne homogène de longueur  $\ell$  et d'épaisseur négligeable. La barre tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour de son centre d'inertie  $O$  qui est fixe. Le mouvement est plan.

Le disque et la barre sont en contact au point  $K$ . Les coefficients de frottement statique et dynamique entre ceux-ci sont respectivement notés  $\mu_s$  et  $\mu$ . Le moment principal central d'inertie du disque par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du mouvement vaut  $ma^2/2$ .

À l'instant initial, la barre est horizontale et le disque est au repos par rapport à celle-ci alors que le point  $K$  se trouve à une distance  $d$  du point  $O$ .



- Déterminez, en justifiant votre réponse, le nombre de degrés de liberté du disque et introduisez les coordonnées généralisées appropriées pour en décrire le mouvement.
- Exprimez la vitesse absolue du centre d'inertie du disque.
- Exprimez la vitesse absolue du point  $A$  de la barre situé à l'extrémité de celle-ci.
- Exprimez la relation de roulement sans glissement du disque sur la barre.
- Relevez les forces agissant sur le disque et donnez-en les caractéristiques principales (point d'application, direction, force conservative, force appliquée ou de liaison).
- Écrivez\* le théorème de la quantité de mouvement pour le disque.
- Écrivez\* le théorème du moment cinétique pour le disque rapporté à son centre d'inertie. Précisez le système d'axes par rapport auquel le mouvement du disque est rapporté pour écrire ce théorème.
- L'énergie du disque est-elle conservée au cours du mouvement ? Justifiez.
- Déterminez la loi du mouvement du disque par rapport à la barre.
- Déterminez la condition sur les paramètres du problème pour que le roulement sans glissement soit possible à l'instant initial.

\* Explicitiez les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu.

SOLUTION

Question I

Voir livre de référence §4.2, §4.3, §4.10 et §6.2.3.

Question II

i. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -\mu m \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^2} = -\mu m r^{-1} \mathbf{e}_r$$

où  $\mathbf{s} = \mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r$  est le vecteur position de P par rapport au centre de force O. En simplifiant par la masse  $m$ , on obtient

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\mu r^{-1} \mathbf{e}_r$$

ii. Multipliant cette équation vectoriellement par  $\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r$ , on obtient

$$\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

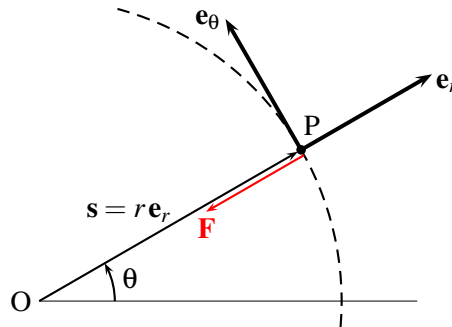
soit

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur constant  $\mathbf{h}$  comprenant le point O puisque, à tout instant,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = 0$$

iii. Le mouvement étant plan, on peut le décrire en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.



L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = -\mu r^{-1} \mathbf{e}_r$$

Projetant cette équation dans les directions radiale et tangentielle, on obtient

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mu r^{-1} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$$

De la seconde équation, on tire une première intégrale première scalaire qui exprime la conservation du moment cinétique (par unité de masse) et qui s'écrit

$$r^2 \dot{\theta} = h \tag{2}$$

Éliminant  $\dot{\theta}$  de (1) en utilisant (2), on obtient

$$\ddot{r} - h^2 r^{-3} + \mu r^{-1} = 0$$

En multipliant par  $\dot{r}$  et en intégrant, il vient

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} + \mu \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \text{constante} = e \quad (3)$$

où  $r_0$  est une constante introduite pour rendre l'argument du logarithme adimensionnel.

Cette deuxième intégrale première scalaire exprime la conservation de l'énergie par unité de masse.

iv. Il est possible de discuter le mouvement sur un diagramme de potentiel à partir de l'intégrale première

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \mathcal{V}(r) = e$$

où on a posé

$$\mathcal{V}(r) = \frac{h^2}{2r^2} + \mu \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

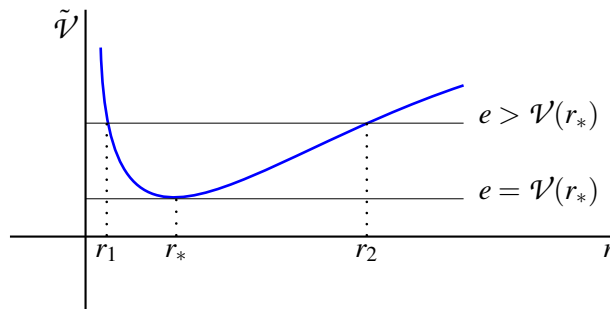
On calcule aisément

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{V}(r) = +\infty$$

et

$$\mathcal{V}'(r) = -\frac{h^2}{r^3} + \frac{\mu}{r}$$

La fonction  $\mathcal{V}$  possède donc un seul extremum en  $r = \sqrt{h^2/\mu} = r_*$  qui, considérant les limites calculées et le signe de la dérivée, est aisément identifié comme un minimum.



- Si  $e = \mathcal{V}(r_*)$ , le point décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r_*$  à la vitesse angulaire constante  $\dot{\theta} = h/r_*^2$ .
- Si  $e > \mathcal{V}(r_*)$ , le mouvement est borné entre deux cercles de rayons  $r_1$  et  $r_2$ .

v. Comme montré ci-dessus, une trajectoire circulaire de rayon  $r = r_*$  est possible si des conditions initiales adéquates sont données au point P.

La période du mouvement de rotation du point matériel sur cette trajectoire circulaire est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = \frac{2\pi r_*^2}{|h|} = \frac{2\pi|h|}{\mu}$$

vi. La troisième loi de Kepler indique que, dans le cas d'une trajectoire circulaire, le carré de la période du mouvement est proportionnel au cube du rayon de la trajectoire. Ici, puisque

$$|h| = r_*^2 |\dot{\theta}| = r_*^2 \frac{2\pi}{T}$$

on a

$$T = \frac{2\pi|h|}{\mu} = \frac{2\pi}{\mu} \left( r_*^2 \frac{2\pi}{T} \right)$$

Si la force d'attraction universelle était de la forme  $(\star)$ , la troisième loi de Kepler prendrait donc la forme alternative

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_*$$

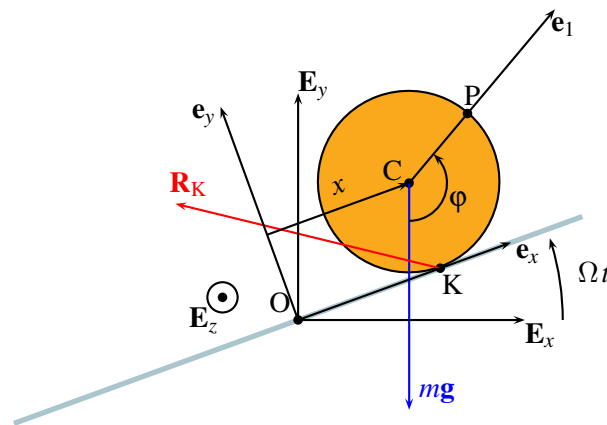
La période du mouvement sur une trajectoire circulaire serait proportionnelle au rayon de la trajectoire.

- vii. La loi des aires indique que le rayon vecteur joignant le centre de force O au point P balaie des aires égales en des temps égaux au cours de son mouvement. Ceci ne dépend pas de la forme particulière de la force centrale considérée et est donc valable ici. Il s'agit en effet d'une simple conséquence de la constance du moment cinétique puisque l'aire balayée par unité de temps s'exprime par

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}\| = \frac{|h|}{2}$$

- viii. L'étude du diagramme de potentiel de la force en  $r^{-1}$  montre que toutes les orbites sont liées au centre de force. Il n'y aurait donc pas moyen d'échapper à l'attraction terrestre comme le permet la force en  $r^{-2}$ .

### Question III



- i. Le disque en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Son contact avec la barre, dont le mouvement est connu, et le roulement sans glissement sur celle-ci introduisent 2 liaisons de sorte que le disque ne possède qu'un seul degré de liberté.

Le mouvement du disque peut être décrit par les coordonnées  $x$ , mesurant la position du disque sur la barre, et  $\varphi$ , mesurant la rotation du disque autour de son centre d'inertie (voir figure). Les deux coordonnées généralisées ne sont pas indépendantes mais sont reliées par la condition de roulement sans glissement.

- ii. Le vecteur position du point C s'écrit

$$\mathbf{s}_C = x\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y$$

où  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  sont liés à la barre et tournent avec celle-ci à la vitesse  $\Omega\mathbf{E}_z$ . On a donc

$$\dot{\mathbf{s}}_C = \dot{x}\mathbf{e}_x + x\dot{\mathbf{e}}_x + a\dot{\mathbf{e}}_y = \dot{x}\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y - a\Omega\mathbf{e}_x = (\dot{x} - a\Omega)\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y$$

- iii. Le vecteur position du point A s'écrit

$$\mathbf{s}_A = \frac{\ell}{2}\mathbf{e}_x$$

On a donc

$$\dot{\mathbf{s}}_A = \frac{\ell}{2}\dot{\mathbf{e}}_x = \frac{\ell}{2}\Omega\mathbf{e}_y$$

- iv. Le roulement sans glissement du disque sur la barre s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels du disque et de la barre en contact au point géométrique K à un instant donné, soit

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{disque}} = \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{barre}}$$

Le vecteur position du point de la barre situé en K s'écrit  $\mathbf{s}_K^{\text{barre}} = x\mathbf{e}_x$ . Sa vitesse se calcule comme celle du point A, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{barre}} = x\dot{\mathbf{e}}_x = x\Omega\mathbf{e}_y$$

Le vecteur position d'un point quelconque P du disque s'écrit

$$\mathbf{s}_P = \mathbf{s}_C + a\mathbf{e}_1$$

et sa vitesse

$$\dot{\mathbf{s}}_P = (\dot{x} - a\Omega)\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y + a\dot{\phi}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}_1$$

puisque le vecteur de Poisson du disque (et donc aussi du vecteur  $\mathbf{e}_1$ ) est  $\boldsymbol{\omega}^{\text{disque}} = \dot{\phi}\mathbf{E}_z$ .

En particulier, pour le point matériel se trouvant en K, on a  $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_y$  de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{disque}} = (\dot{x} - a\Omega)\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y - a\dot{\phi}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}_y = (\dot{x} - a\Omega)\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y + a\dot{\phi}\mathbf{e}_x$$

Dès lors, le roulement sans glissement du disque sur la barre s'exprime par la relation

$$x\Omega\mathbf{e}_y = (\dot{x} - a\Omega)\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y + a\dot{\phi}\mathbf{e}_x$$

soit

$$\dot{x} - a\Omega + a\dot{\phi} = 0 \quad (4)$$

v. Les forces agissant sur le disque sont

- $m\mathbf{g}$ , la résultante des forces de pesanteur sur le disque, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
- $\mathbf{R}_K = T\mathbf{e}_x + N\mathbf{e}_y$ , force de liaison de direction inconnue agissant en K dans le plan du mouvement.

vi. Le théorème de la quantité de mouvement pour le disque s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_O^{\text{disque}} = m\ddot{\mathbf{s}}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_K$$

Puisque  $\dot{\mathbf{s}}_C = (\dot{x} - a\Omega)\mathbf{e}_x + x\Omega\mathbf{e}_y$ , on a

$$m \left[ \ddot{x}\mathbf{e}_x + (\dot{x} - a\Omega)\Omega\mathbf{e}_y + \dot{x}\Omega\mathbf{e}_y - x\Omega^2\mathbf{e}_x \right] = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{e}_y + T\mathbf{e}_x$$

ou

$$m(\ddot{x} - x\Omega^2)\mathbf{e}_x + m(2\dot{x}\Omega - a\Omega^2)\mathbf{e}_y = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{e}_y + T\mathbf{e}_x \quad (5)$$

vii. L'application du théorème du moment cinétique pour le disque rapporté à un système d'axes centré en son centre d'inertie et parallèles à des axes inertiels conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}^{\text{disque}} = \frac{ma^2}{2} \dot{\phi} \mathbf{E}_z$$

et

$$\mathbf{M}_C = -a\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{R}_K = -a\mathbf{e}_y \wedge (T\mathbf{e}_x + N\mathbf{e}_y) = aT\mathbf{E}_z$$

Dès lors, en projetant le théorème sur  $\mathbf{E}_z$ , on obtient

$$\frac{ma}{2} \ddot{\phi} = T \quad (6)$$

viii. La puissance développée par la force de liaison s'écrit

$$\mathbf{R}_K \cdot \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{disque}} = \mathbf{R}_K \cdot \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{barre}} = (T\mathbf{e}_x + N\mathbf{e}_y) \cdot x\Omega\mathbf{e}_y = Nx\Omega \neq 0$$

Il n'y a donc pas conservation de l'énergie du disque.

ix. La condition de roulement sans glissement (4) permet d'éliminer la variable  $\varphi$ . On a

$$a\dot{\varphi} = -\dot{x} + a\Omega$$

de sorte que (6) s'écrit

$$T = \frac{ma}{2}\ddot{\varphi} = -\frac{m}{2}\ddot{x}$$

Introduisant cette expression de  $T$  dans la projection de l'équation (5) sur  $\mathbf{e}_x$ , on obtient

$$T = -\frac{m}{2}\ddot{x} = m(\ddot{x} - x\Omega^2) + mg\mathbf{E}_y \cdot \mathbf{e}_x = m(\ddot{x} - x\Omega^2) + mg\sin(\Omega t)$$

où on a pris en compte que la barre est horizontale en  $t = 0$ . On a donc

$$-\frac{3}{2}\ddot{x} + x\Omega^2 = g\sin(\Omega t)$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\ddot{x} - \frac{2}{3}\Omega^2 x = -\frac{2}{3}g\sin(\Omega t) \quad (7)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène dont la solution s'exprime comme la somme de la solution générale  $x_h(t)$  de l'équation homogène et d'une solution particulière  $x_p(t)$  de l'équation non homogène. On a

$$x_h(t) = C_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega t\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega t\right)$$

et, vu la forme du second membre, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = C\sin(\Omega t)$$

Injectant cette forme dans (7), on obtient

$$-\Omega^2 C\sin(\Omega t) - \frac{2}{3}\Omega^2 C\sin(\Omega t) = -\frac{2}{3}g\sin(\Omega t)$$

soit

$$C = \frac{2g}{5\Omega^2}$$

On a donc

$$x(t) = C_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega t\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega t\right) + \frac{2g}{5\Omega^2}\sin(\Omega t)$$

où les constantes sont déterminées en considérant les conditions initiales  $x(0) = d$  et  $\dot{x}(0) = 0$ , soit

$$\begin{cases} d = C_1 \\ 0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Omega C_2 + \frac{2g}{5\Omega} \end{cases}$$

Finalement, la loi du mouvement du disque par rapport à la barre s'écrit

$$x(t) = d \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega t\right) - \frac{\sqrt{6}g}{5\Omega^2} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega t\right) + \frac{2g}{5\Omega^2}\sin(\Omega t) \quad (8)$$

x. Remarquons tout d'abord que la condition cinématique de roulement sans glissement (4) est bien vérifiée à l'instant initial puisque le disque est au repos par rapport à la barre.

D'un point de vue dynamique, le roulement sans glissement en  $\mathbb{K}$  n'est possible que si  $|T| \leq \mu_s |N|$ .

En exploitant (5) à l'instant initial, on a  $\mathbf{E}_y = \mathbf{e}_y$  et

$$\begin{cases} N(0) = mg + m(2\dot{x}_0\Omega - a\Omega^2) \\ T(0) = m(\ddot{x}_0 - x_0\Omega^2) \end{cases}$$

où l'indice  $_0$  désigne les valeurs initiales des variables correspondantes.

En vertu de conditions initiales, on sait que  $x_0 = d$  et  $\dot{x}_0 = 0$ . En exploitant (8), on calcule aisément

$$\ddot{x}_0 = \ddot{x}(0) = \frac{2d\Omega^2}{3}$$

En injectant ces valeurs dans les expressions de  $N(0)$  et  $T(0)$ , on obtient

$$\begin{cases} N(0) = m(g - a\Omega^2) \\ T(0) = -\frac{md\Omega^2}{3} \end{cases}$$

où la nature unilatérale du contact entre le disque et la barre demande que  $N(0)$  soit positif.

Le roulement sans glissement est donc possible initialement si

$$\frac{d\Omega^2}{3} \leq \mu_s(g - a\Omega^2)$$

où  $\mu_s$  désigne le coefficient de frottement statique entre le disque et la barre.