LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2024

# MECA0003 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

## EXERCICE DIRIGÉ : POST-TEST

1. **Déterminez les dimensions de la raideur $k$. Justifiez.**

   Puisque $\mathbf{F} = -k(r-\ell)\mathbf{e}_r$ et qu'un vecteur unitaire est sans dimension, on a

$$[k] = \frac{[Force]}{[longueur]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

   Alternativement, on a

$$k = \frac{9m\omega^2\ell^4}{[(r-\ell)^2+3\ell^2]^2}$$

   de sorte que

$$[k] = \frac{[m][\omega^2][\ell^4]}{[longueur^4]} = \frac{MT^{-2}L^4}{L^4} = MT^{-2}$$

2. **Expliquez, sans développement mathématique, pourquoi l'énergie est conservée dans le problème étudié.**

   L'énergie est conservée puisque la force de pesanteur et la force de rappel sont conservatives et que la force de liaison, perpendiculaire à la vitesse du point matériel en l'absence de frottement, ne développe aucune puissance.

3. **Déterminez l'expression du potentiel dont dérive la force de rappel $\mathbf{F} = -k(r-\ell)\mathbf{e}_r$ du ressort dans le cas où la raideur varie selon**

$$k = \frac{k_0}{1+\left(\frac{r}{\ell}-1\right)^2} \qquad \text{où } k_0 \text{ est une constante.}$$

   On a

$$\mathbf{F} = -k(r-\ell)\mathbf{e}_r = -\frac{k_0}{1+\left(\frac{r}{\ell}-1\right)^2}(r-\ell)\mathbf{e}_r = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r$$

   de sorte que

$$V = \int \frac{k_0\ell\left(\frac{r}{\ell}-1\right)}{1+\left(\frac{r}{\ell}-1\right)^2}\,dr = \frac{k_0\ell^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{r}{\ell}-1\right)^2\right]$$

4. **Considérant que le joueur se trouve initialement à une distance $3\ell$ de O lorsqu'il est projeté avec une vitesse $\mathbf{u}_0$ perpendiculaire au vecteur OP, déterminez pour quelle valeur de $u_0 = \|\mathbf{u}_0\|$ il décrit une trajectoire circulaire.**

   On a

$$r^2\dot\theta = h \quad \text{et} \quad \ddot r - \frac{h^2}{r^3} = \frac{-9\omega^2\ell^4(r-\ell)}{[(r-\ell)^2+3\ell^2]^2}$$

   En $t=0$ : $r = 3\ell$, $\dot r = 0$ et $r\dot\theta = u_0$ $\quad\Rightarrow\quad h = 3\ell u_0$

$$\Rightarrow \quad \ddot r - \frac{9\ell^2u_0^2}{r^3} = \frac{-9\omega^2\ell^4(r-\ell)}{[(r-\ell)^2+3\ell^2]^2}$$

   Le joueur décrira une trajectoire circulaire si $\ddot r = 0$ pour $r = 3\ell$, c'est-à-dire si

$$\frac{9\ell^2u_0^2}{(3\ell)^3} = \frac{9\omega^2\ell^4(3\ell-\ell)}{[(3\ell-\ell)^2+3\ell^2]^2} = \frac{18\omega^2\ell^4\ell}{[7\ell^2]^2}$$

   La vitesse à communiquer au joueur est donc donnée par

$$u_0^2 = \frac{54}{49}\omega^2\ell^2 \quad \text{soit} \quad u_0 = \frac{3\sqrt{6}}{7}\omega\ell$$