Décembre 2024

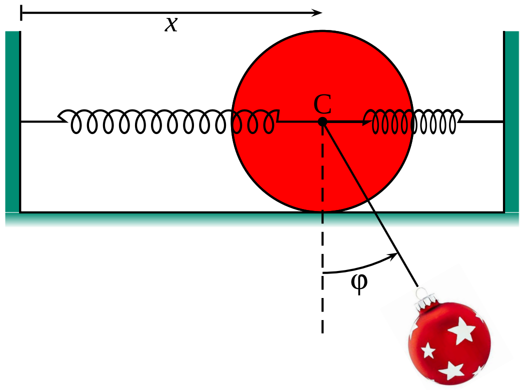
MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Prof. Éric J.M.DELHEZ

On considère une décoration de Noël constituée d'un disque roulant sans glisser sur un plan horizontal et d'une boule de Noël attachée au centre du disque par l'intermédiaire d'une corde inextensible de longueur ℓ.

Le centre d'inertie C du disque est relié à des parois verticales (espacées d'un distance d) par le biais de deux ressorts horizontaux identiques de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Le disque est caractérisé par une masse M, un rayon a et un moment central d'inertie $Ma^2/2$ par rapport à son axe de symétrie de révolution. La boule de Noël est assimilée à un point matériel P de masse m.

Tous les mouvements ont lieu dans un plan vertical.

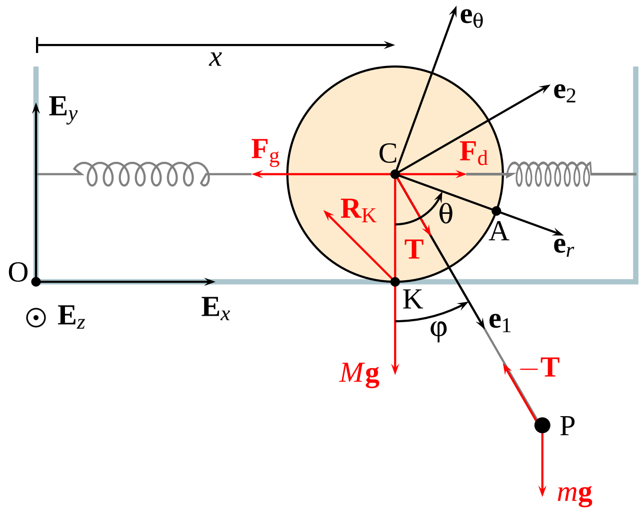


i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système total (disque + point matériel) et introduisez des coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement.
ii. Relevez toutes les forces agissant sur le disque et sur le point matériel en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/de liaison, force conservative, force externe/interne par rapport au système total).
iii. Déterminez la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan horizontal.
iv. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement **pour le système total**.
v. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement **pour le point matériel**.
vi. Écrivez* le théorème du moment cinétique **pour le disque** par rapport à un repère centré en son centre d'inertie et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels.
vii. Montrez qu'on peut décrire complètement le mouvement du système par la condition de roulement sans glissement écrite en iii et les deux équations différentielles

$$\begin{cases} m\ddot{x}\cos\varphi + m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \\ \left(\dfrac{3M}{2} + m\right)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = k(d-2x) \end{cases}$$

ne faisant pas intervenir les forces de liaison.
viii. Déterminez la loi du mouvement du disque si la masse de la boule est négligeable et que le disque est abandonné sans vitesse alors que le ressort de gauche est à sa longueur naturelle.
ix. Dans le cas général (m non négligeable), déterminez la configuration d'équilibre du système compatible avec le fait que la corde soit tendue.
x. En vous plaçant dans le cas où $M = 3m$ et $k/m = g/\ell$, montrez que les petites oscillations du système autour de cette configuration d'équilibre sont caractérisées par la combinaison de deux mouvements harmoniques à des pulsations différentes. Exprimez ces pulsations en fonction de $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Le mouvement résultant est-il périodique ?

* Explicitez les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu.



i. Le système étudié comprend un disque et un point matériel.
   - Le disque en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté mais le contact avec le plan et la condition de roulement sans glissement introduisent 2 liaisons. Le disque possède donc un seul degré de liberté.
   - Le point matériel en mouvement plan possède au maximum deux degrés de liberté. La distance CP étant constante, il ne possède qu'un seul degré de liberté correspondant à ses oscillations autour de C.

   Au total, le système étudié possède deux degrés de liberté.

   Le mouvement du disque peut être décrit par la coordonnée x mesurant le déplacement horizontal de son centre d'inertie par rapport à la paroi de gauche et par l'angle θ mesurant la rotation autour de son centre d'inertie (voir figure). Ces deux coordonnées sont liées par la condition de roulement sans glissement (voir iii.). Le mouvement du point est décrit par l'angle φ entre la verticale passant par C et la corde supportant le point matériel.

ii. Les forces agissant sur le disque sont :
   - $M\mathbf{g} = -Mg\mathbf{E}_y$, la force de pesanteur, force appliquée conservative agissant au point C ;
   - $\mathbf{F}_\mathrm{g} = -k(x-\ell_0)\mathbf{E}_x$, la force de rappel du ressort de gauche, force appliquée conservative agissant au point C ;
   - $\mathbf{F}_\mathrm{d} = k(d-x-\ell_0)\mathbf{E}_x$, la force de rappel du ressort de droite, force appliquée conservative agissant au point C ;
   - $\mathbf{R}_\mathrm{K} = N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x$, une force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K ;
   - $\mathbf{T} = T\,\mathbf{e}_1$, la tension dans la corde agissant en C.

   Les forces agissant sur le point matériel sont :
   - $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_y$, la force de pesanteur, force appliquée conservative ;
   - $-\mathbf{T} = -T\,\mathbf{e}_1$, la tension dans la corde.

   Les forces $\pm\mathbf{T}$ sont des forces internes au système constitué du disque et du point matériel.

iii. Le roulement sans glissement du disque sur le plan horizontal s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels du disque et du plan fixe en contact au point géométrique K à un instant donné, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^{\text{disque}} = \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^{\text{plan}}$$

   Puisque le plan est immobile, on a $\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^{\text{plan}} = \mathbf{0}$.
   Le vecteur position d'un point quelconque du pourtour du solide, par exemple A, s'écrit

$$\mathbf{s}_\mathrm{A} = a\mathbf{E}_y + x\mathbf{E}_x + a\mathbf{e}_r$$

et, puisque le vecteur de Poisson du disque est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{A} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

En K, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{E}_y$ et $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{E}_x$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^\mathrm{disque} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x = \mathbf{0}$$

Dès lors, le roulement sans glissement du disque sur le plan s'exprime par la relation

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{1}$$

iv. Le théorème de la quantité de mouvement pour le système total s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O} = \dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O}^\mathrm{disque} + \dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O}^\mathrm{P} = M\ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} + m\ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = \mathbf{G}^{ext} = M\mathbf{g} + \mathbf{F}_\mathrm{g} + \mathbf{F}_\mathrm{d} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{K}$$

où

$$\mathbf{s}_\mathrm{C} = a\mathbf{E}_y + x\mathbf{E}_x \quad \text{donc} \quad \ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = \ddot{x}\mathbf{E}_x$$

et, puisque le vecteur de Poisson des axes $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ liés à la corde est $\dot{\varphi}\mathbf{E}_z$,

$$\mathbf{s}_\mathrm{P} = a\mathbf{E}_y + x\mathbf{E}_x + \ell\mathbf{e}_1,\ \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \ell\dot{\varphi}\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = \ddot{x}\mathbf{E}_x + \ell\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - \ell\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x}\mathbf{E}_x + m\ell\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - m\ell\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1 &= -(M+m)g\mathbf{E}_y - k(x-\ell_0)\mathbf{E}_x + k(d-x-\ell_0)\mathbf{E}_x + N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x \\ &= -(M+m)g\mathbf{E}_y + k(d-2x)\mathbf{E}_x + N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x\end{aligned} \tag{2}$$

v. Le théorème de la quantité de mouvement pour le point matériel s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O}^\mathrm{P} = m\ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = m\mathbf{g} - \mathbf{T}$$

soit

$$m\ddot{x}\mathbf{E}_x + m\ell\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - m\ell\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1 = -mg\mathbf{E}_y - T\mathbf{e}_1 \tag{3}$$

vi. Le théorème du moment cinétique pour le disque par rapport à un système d'axes d'orientation fixe centré en son centre d'inertie s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C} = \mathbf{M}_\mathrm{C}$$

D'une part, on a

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = -a\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R}_\mathrm{K} = -a\mathbf{E}_y \wedge (N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x) = aT_\mathrm{K}\mathbf{E}_z$$

D'autre part, puisque le vecteur de Poisson du solide est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, il vient

$$\mathbf{H}_\mathrm{C} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \omega = \frac{Ma^2}{2}\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

En projetant le théorème sur l'axe $\mathbf{E}_z$, on obtient donc

$$\frac{Ma^2}{2}\ddot{\theta} = aT_\mathrm{K} \tag{4}$$

vii. Une première équation ne faisant pas intervenir les forces de liaison inconnues peut être obtenue en projetant l'équation (3) sur l'axe $\mathbf{e}_2$, perpendiculaire à la corde. On a

$$m\ddot{x}\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{e}_2 + m\ell\ddot{\varphi} = -mg\mathbf{E}_y \cdot \mathbf{e}_2$$

soit

$$m\ddot{x}\cos\varphi + m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \tag{$\diamondsuit$}$$

Ensuite, la projection de l'équation (2) sur l'axe $\mathbf{E}_x$ donne

$$(M+m)\ddot{x}+m\ell\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}_x-m\ell\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{E}_x=k(d-2x)+T_\mathrm{K}$$

soit, en utilisant l'équation (4) pour éliminer T_K et la condition de roulement sans glissement (1) pour éliminer $\ddot{\theta}$,

$$(M+m)\ddot{x}+m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi-m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi=k(d-2x)+\frac{Ma}{2}\ddot{\theta}=k(d-2x)-\frac{M}{2}\ddot{x}$$

Finalement, on a

$$\left(\frac{3M}{2}+m\right)\ddot{x}+m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi-m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi=k(d-2x) \qquad (\spadesuit)$$

Les équations ($\diamondsuit$) et ($\spadesuit$) constituent un système de 2 équations différentielles pour x et φ ne faisant pas intervenir les forces de liaison inconnues et permettant, avec la condition de roulement sans glissement, de décrire complètement le mouvement du système.

viii. Si on néglige la masse m du pendule, l'équation ($\spadesuit$) devient

$$\frac{3M}{2}\ddot{x}=k(d-2x)$$

soit

$$\ddot{x}+\frac{4}{3}\frac{k}{M}x=\frac{2}{3}\frac{k}{M}d$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire dont la solution générale s'écrit

$$x(t)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}\frac{k}{M}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}\frac{k}{M}}t\right)+\frac{d}{2}$$

Les conditions initiales $x(0)=\ell_0$ et $\dot{x}(0)=0$ permettent de déterminer les constantes $C_1=\ell_0-d/2$ et $C_2=0$ de sorte que la loi du mouvement du disque s'écrit

$$x(t)=\left(\ell_0-\frac{d}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}\frac{k}{M}}t\right)+\frac{d}{2}$$

ix. Les configurations d'équilibre s'obtiennent en annulant les vitesses et les accélérations dans les équations ($\diamondsuit$) et ($\spadesuit$) décrivant le mouvement, ce qui conduit aux conditions

$$\begin{cases}\sin\varphi=0\\ k(d-2x)=0\end{cases}$$

Il y a donc potentiellement deux configurations d'équilibre caractérisées par $x=d/2$ et $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$. On peut vérifier que la corde est tendue si $\varphi=0$ mais ne l'est pas si $\varphi=\pi$. En effet, la projection de l'équation (3) sur l'axe $\mathbf{e}_1$ donne à l'équilibre

$$T=-mg\mathbf{E}_y\cdot\mathbf{e}_1=mg\cos\varphi$$

Pour que la corde reste tendue, T doit être positif, ce qui indique que la configuration où $\varphi=\pi$ n'est pas acceptable. La seule configuration d'équilibre du système étudié correspond donc à $x=d/2$ et $\varphi=0$.

x. Le mouvement du système est décrit par les équations ($\diamondsuit$) et ($\spadesuit$), soit

$$\begin{cases}m\ddot{x}\cos\varphi+m\ell\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi\\ \left(\frac{3M}{2}+m\right)\ddot{x}+m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi-m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi=k(d-2x)\end{cases}$$

Les équations décrivant l'évolution de petites oscillations autour de la configurations d'équilibre s'obtiennent en introduisant $x = (d/2) + \xi$ et $\varphi = \eta$ dans le système ci-dessus, soit

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}\cos\eta + m\ell\ddot{\eta} = -mg\sin\eta \\ \left(\dfrac{3M}{2} + m\right)\ddot{\xi} + m\ell\ddot{\eta}\cos\eta - m\ell\dot{\eta}^2\sin\eta = -2k\xi \end{cases}$$

En linéarisant ces équations, on obtient

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + m\ell\ddot{\eta} = -mg\eta \\ \left(\dfrac{3M}{2} + m\right)\ddot{\xi} + m\ell\ddot{\eta} = -2k\xi \end{cases}$$

et, dans le cas où $M = 3m$ et $k/m = g/\ell$,

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \ell\ddot{\eta} + g\eta = 0 \\ \dfrac{11}{2}\ddot{\xi} + \ell\ddot{\eta} + \dfrac{2g}{\ell}\xi = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations différentielles linéaires d'ordre 2 est équivalent à une équation différentielle d'ordre 4 qui peut être obtenue en éliminant une variable. En dérivant deux fois la deuxième équation par rapport au temps, On obtient

$$\frac{11}{2}\frac{d^4\xi}{dt^4} + \ell\frac{d^4\eta}{dt^4} + \frac{2g}{\ell}\ddot{\xi} = 0$$

De la première équation, on tire

$$\ddot{\xi} = -\ell\ddot{\eta} - g\eta$$

de sorte que

$$\frac{11}{2}\left(-\ell\frac{d^4\eta}{dt^4} - g\ddot{\eta}\right) + \ell\frac{d^4\eta}{dt^4} + \frac{2g}{\ell}(-\ell\ddot{\eta} - g\eta) = 0$$

En simplifiant, on a

$$\frac{9}{2}\frac{d^4\eta}{dt^4} + \left(\frac{11}{2} + 2\right)\frac{g}{\ell}\ddot{\eta} + \frac{2g^2}{\ell^2}\eta = 0$$

ou encore, en introduisant $\omega^2 = g/\ell$,

$$9\frac{d^4\eta}{dt^4} + 15\omega^2\ddot{\eta} + 4\omega^4\eta = 0$$

Les zéros du polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants sont les solutions de l'équation bicarrée

$$9z^4 + 15\omega^2 z^2 + 4\omega^4 = 0$$

soit

$$z_{1,2}^2 = \frac{-15\omega^2 \pm \sqrt{81\omega^4}}{18}$$

c'est-à-dire

$$z_1^2 = -\frac{\omega^2}{3} \quad \text{et} \quad z_2^2 = -\frac{4\omega^2}{3}$$

et donc

$$z_1 = \pm i\omega_1 \quad \text{où} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\omega \quad \text{et} \quad z_2 = \pm i\omega_2 \quad \text{où} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}\,\omega$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors

$$\eta(t) = A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)$$

où A_1, B_1, A_2 et B_2 sont des constantes. On obtiendrait de la même manière

$$\xi(t) = \tilde{A}_1 \cos(\omega_1 t) + \tilde{B}_1 \sin(\omega_1 t) + \tilde{A}_2 \cos(\omega_2 t) + \tilde{B}_2 \sin(\omega_2 t)$$

où $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{A}_2$ et $\tilde{B}_2$ sont des constantes.

Les petites oscillations du système autour de sa configuration d'équilibre sont donc caractérisées par la combinaison de deux mouvements harmoniques aux pulsations différentes ω_1 et ω_2. Le mouvement résultant est périodique s'il existe une période commune à ces deux mouvements harmoniques, c'est-à-dire si on peut trouver deux entiers p et q tels que

$$p\frac{2\pi}{\omega_1} = q\frac{2\pi}{\omega_2}$$

donc si

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

C'est bien le cas ici puisque

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Dès lors, le mouvement est effectivement périodique.