LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2024

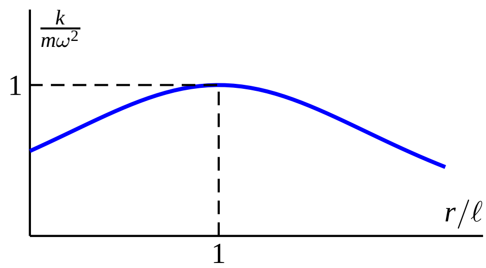
MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Lors de la traditionnelle foire d'octobre de Liège, une attraction originale a été refusée par le service de contrôle car elle n'offrait pas toutes les garanties de sécurité. L'attraction se nomme *'le saut à l'élastique à l'horizontale'*. Elle se déroule sur un plateau horizontal parfaitement lisse. Le joueur, assimilé à un point matériel P de masse m, est astreint à se déplacer dans le plan horizontal et est relié à un axe situé au centre du plateau O par un ressort de longueur naturelle ℓ et de raideur k. À l'instant initial, le joueur est projeté horizontalement avec une vitesse $\mathbf{u}_0$ perpendiculaire au vecteur $\mathbf{OP}$ alors qu'il se trouve à une distance ℓ de O.

Les exploitants ont présenté les résultats d'une étude montrant qu'il est impossible que le joueur vienne se fracasser sur l'axe central du plateau et que son mouvement est nécessairement borné.

Malheureusement, les services de contrôle n'étaient pas satisfaits de cette étude conduite sous l'hypothèse simplificatrice d'une raideur k constante du ressort.

Afin d'appuyer leur décision d'interdire cette attraction, ils font appel à vous pour déterminer le comportement du joueur dans le cas plus réaliste où la raideur du ressort n'est pas constante mais suit la loi suivante (où $r = \|\mathbf{OP}\|$ et ω est une constante qui a les dimensions d'une vitesse angulaire) :



$$k = \frac{9m\omega^2\ell^4}{[(r-\ell)^2 + 3\ell^2]^2}$$

Cette loi fait apparaître un domaine linéaire classique pour de faibles élongations du ressort et tient compte de l'endommagement du ressort pour de plus grandes déformations.

Plus spécifiquement, vous devez répondre aux questions suivantes.

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système étudié et introduisez des coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur le joueur et citez-en les caractéristiques principales (direction, force appliquée/force de liaison, force conservative – y compris le potentiel dont elle dérive –).

iii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement.

iv. Déterminez deux intégrales premières scalaires du mouvement et leur interprétation physique éventuelle.

v. Introduisez les variables sans dimension $\rho = r/\ell$ et $\tau = u_0 t/\ell$ (où $u_0 = \|\mathbf{u}_0\|$) et le nombre sans dimension $\alpha = \omega\ell/u_0$. Montrez que le mouvement peut être discuté à partir de l'équation

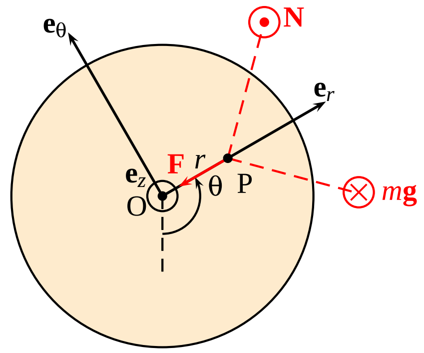
$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{9\alpha^2}{(\rho-1)^2+3} = 1 - 3\alpha^2$$

vi. Dans le cas particulier $\alpha^2 = 1/3$, esquissez le diagramme de potentiel en vous intéressant à ses zéros, son signe et ses limites.

vii. Dans le cas particulier $\alpha^2 = 1/3$, montrez que les exploitants ont raison, même en adoptant la nouvelle expression de k, de prétendre que le joueur ne s'écrasera pas sur l'axe central. Montrez cependant qu'il sera nécessairement projeté en dehors du plateau.

viii. Dans le cas particulier $\alpha^2 = 1/3$, déterminez la norme de la vitesse du joueur au moment où il quitte le plateau si celui-ci a la forme d'un disque de rayon R. Vérifiez que cette vitesse vaut $\sqrt{3}u_0/2$ si $R = 2\ell$.

ix. En repartant des équations dimensionnelles, montrez que le saut à l'élastique à l'horizontale peut permettre à un joueur de décrire une trajectoire circulaire de rayon 2ℓ si celui-ci est propulsé à une vitesse $\mathbf{u}_0$ appropriée (perpendiculaire au vecteur $\mathbf{OP}$) alors que le ressort est initialement étiré d'une longueur ℓ. Déterminez la valeur $u_0 = \|\mathbf{u}_0\|$ donnant ce mouvement circulaire.



i. Le point P est astreint à se déplacer sur une surface plane. Il a donc deux degrés de liberté. Vu la présence de la force centrale exercée par le ressort, les coordonnées polaires r et θ (voir figure) sont utilisées pour décrire le mouvement de P.

ii. Le point P est soumis à
   - la force de la pesanteur $m\mathbf{g}$: force appliquée verticalement vers le bas, dérivant d'un potentiel (constant ici puisque le déplacement est horizontal) ;
   - la force de rappel $\mathbf{F}$ du ressort pouvant être écrite sous la forme

$$\mathbf{F} = -k(r-\ell)\mathbf{e}_r = -\frac{9m\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2}\mathbf{e}_r$$

   Il s'agit d'une force conservative. Le potentiel dont elle dérive est solution de l'équation $\mathbf{F} = -\nabla V$, soit, en exprimant la composante radiale du gradient,

$$\mathbf{F} = -\frac{9m\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2}\mathbf{e}_r = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r$$

   On obtient donc

$$V = \int \frac{9m\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2}\,dr = \frac{-9m\omega^2\ell^4}{2\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]}$$

   - la force de liaison $N\mathbf{e}_z$, normale au plan puisque le mouvement a lieu sans frottement.

iii. Le mouvement du point P est décrit par

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} + N\mathbf{e}_z \tag{1}$$

soit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -mg\mathbf{e}_z - \frac{9m\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2}\mathbf{e}_r + N\mathbf{e}_z \tag{2}$$

iv. Le mouvement étant plan, celui-ci peut être décrit en coordonnées polaires. Dans un tel système de coordonnées, on a

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\ddot{\mathbf{s}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

Dès lors, l'équation différentielle vectorielle (2) peut s'écrire sous la forme

$$m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta\right] = -mg\mathbf{e}_z - \frac{9m\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2}\mathbf{e}_r + N\mathbf{e}_z$$

Les projections de cette équation sur les vecteurs unitaires de coordonnées cylindriques $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$ sont

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-9m\omega^2\ell^4(r-\ell)}{[(r-\ell)^2+3\ell^2]^2} \tag{3}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{4}$$

$$N = mg \tag{5}$$

L'équation (4) donne l'intégrale première

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{6}$$

qui traduit la conservation du moment cinétique par unité de masse. Eliminant $\dot{\theta}$ de l'équation (3) au moyen de l'intégrale première (6), on obtient

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{-9\omega^2\ell^4(r-\ell)}{[(r-\ell)^2+3\ell^2]^2} \tag{7}$$

Tenant compte de ce que la vitesse initiale est perpendiculaire au vecteur **OP**, les conditions initiales

$$\mathbf{s} = r_0\mathbf{e}_r = \ell\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = u_0\,\mathbf{e}_\theta$$

permettent d'identifier

$$r_0 = \ell, \quad \dot{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad r_0\dot{\theta}_0 = u_0$$

et de déterminer la constante d'intégration apparaissant dans l'intégrale première de conservation du moment cinétique, soit

$$r^2\dot{\theta} = h = \ell u_0$$

On a, dès lors,

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2 u_0^2}{r^3} = \frac{-9\omega^2\ell^4(r-\ell)}{[(r-\ell)^2+3\ell^2]^2}$$

Il suffit alors de multiplier cette dernière équation par $\dot{r}$ et d'intégrer par rapport au temps pour obtenir l'intégrale première

$$\dot{r}^2 + \frac{\ell^2 u_0^2}{r^2} - \frac{9\omega^2\ell^4}{(r-\ell)^2+3\ell^2} = 2e = u_0^2 - 3\omega^2\ell^2 \tag{8}$$

où on a également tenu compte des conditions initiales pour déterminer la constante. Cette intégrale première traduit la conservation de l'énergie (par unité de masse), somme de l'énergie cinétique du point matériel et de l'énergie potentielle associée à la déformation du ressort.

v. Introduisons les variables adimensionnelles

$$\rho = \frac{r}{\ell} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{u_0 t}{\ell}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = \frac{u_0}{\ell}\frac{d}{d\tau}$$

ainsi que le paramètre sans dimension

$$\alpha = \frac{\omega\ell}{u_0}$$

L'intégrale première (6) devient

$$\rho^2\frac{d\theta}{d\tau} = 1$$

tandis que l'intégrale première (8) se transforme suivant

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{9\alpha^2}{(\rho-1)^2+3} = 1 - 3\alpha^2$$

vi. Si $\alpha^2 = 1/3$, l'intégrale première devient

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \mathcal{V}(\rho) = 0 \tag{9}$$

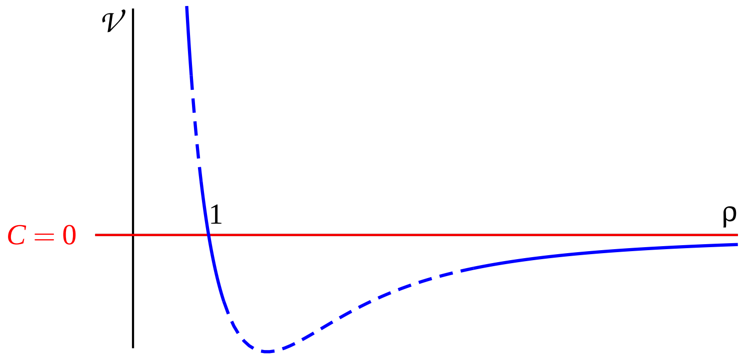
où

$$\mathcal{V}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{3}{(\rho-1)^2+3} = \frac{2(1-\rho)(\rho+2)}{\rho^2\left[(\rho-1)^2+3\right]}$$

La fonction $\mathcal{V}(\rho)$ s'annule en $\rho = 1$ et en $\rho = -2$. Elle est positive entre ses deux zéros et négative ailleurs. Seules les valeurs $\rho > 0$ ont cependant un sens ici puisque $\rho = r/\ell$. On a aussi

$$\lim_{\rho\to+\infty} \mathcal{V}(\rho) = 0^-, \qquad \lim_{\rho\to 0} \mathcal{V}(\rho) = +\infty$$

L'allure du potentiel est représentée ci-dessous. Puisque la constante d'intégration est nulle quand $\alpha^2 = 1/3$, l'information essentielle pour l'interprétation du diagramme de potentiel et la détermination du mouvent réside dans le signe de $\mathcal{V}$, dont on sait qu'il est positif sur $]0,1[$ et négatif sur $]1,+\infty[$. Le comportement précis de $\mathcal{V}$ dans ces deux régions ne peut être déterminé sur base des éléments d'analyse ci-dessus mais est sans influence pour la discussion des questions examinées ultérieurement.



vii. On remarque immédiatement que $\rho = 1$ est un point de réflexion limitant le puits de potentiel du côté des plus petites valeurs de ρ puisque $\mathcal{V}(1) = 0$ et $\mathcal{V}'(1) < 0$. Le point P ne peut donc s'approcher davantage du centre de force et le ressort ne sera jamais comprimé.

Le diagramme de potentiel nous apprend aussi que le mouvement est non borné, ce qui indique que le joueur sera nécessairement projeté en dehors du plateau.

viii. La vitesse du joueur s'écrit, en coordonnées polaires,

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

où $r = R$ sur le bord du plateau, $r\dot{\theta} = \ell u_0/r$ en vertu de l'intégrale première (6) et

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \ell\frac{d\rho}{d\tau}\frac{u_0}{\ell} = u_0\frac{d\rho}{d\tau}$$

Exploitant l'intégrale première (9) pour $\rho = R/\ell$, on obtient

$$\left[\left.\frac{d\rho}{d\tau}\right|_{\rho=R/\ell}\right]^2 = -\frac{1}{\left(\frac{R}{\ell}\right)^2} + \frac{3}{[(\frac{R}{\ell})-1]^2+3}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{s}}\|^2_{r=R} &= \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right]_{r=R} = u_0^2\left[\left.\frac{d\rho}{d\tau}\right|_{\rho=R/\ell}\right]^2 + u_0^2\frac{\ell^2}{R^2} \\ &= -u_0^2\frac{\ell^2}{R^2} + \frac{3u_0^2}{[(\frac{R}{\ell})-1]^2+3} + u_0^2\frac{\ell^2}{R^2} = \frac{3u_0^2}{[(\frac{R}{\ell})-1]^2+3}\end{aligned}$$

On vérifie que, si $R = 2\ell$,

$$\|\dot{\mathbf{s}}\| = \sqrt{\frac{3u_0^2}{(2-1)^2+3}} = \sqrt{\frac{3u_0^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}u_0$$

ix. Considérons les équations (6) et (7) obtenues ci-dessus, soit

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{et} \quad \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{-9\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2}$$

La constante h peut être déterminée en prenant en compte les nouvelles conditions initiales : $r_0 = 2\ell$, $\dot{r}_0 = 0$ et $r_0\dot{\theta}_0 = u_0$. On obtient $h = 2\ell u_0$. L'élimination de $\dot{\theta}$ entre les deux équations donne alors

$$\ddot{r} - \frac{4\ell^2 u_0^2}{r^3} = \frac{-9\omega^2\ell^4(r-\ell)}{\left[(r-\ell)^2+3\ell^2\right]^2} \tag{10}$$

La vitesse radiale initiale étant nulle, le joueur décrira une trajectoire circulaire de rayon 2ℓ si r reste constant, c'est-à-dire si $\ddot{r} = 0$ ou encore, vu (10), si

$$\frac{4\ell^2 u_0^2}{(2\ell)^3} = \frac{9\omega^2\ell^4(2\ell-\ell)}{\left[(2\ell-\ell)^2+3\ell^2\right]^2} = \frac{9\omega^2\ell^5}{\left[4\ell^2\right]^2}$$

La vitesse à communiquer au joueur est donc donnée par

$$u_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\omega\ell$$