Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2025

MATH0502 - Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'analyse mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions sans aide extérieure, sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Question I

i. On considère la suite convergente $\{a_k\}$ avec $a_k \in \mathtt{I}$, $\forall k \geq N$, et $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$. Peut-on affirmer que $\lim_{k\to+\infty} a_k \in \mathtt{I}$? Justifiez.

ii. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ à termes strictement positifs ($x_k > 0$, $\forall k$) est convergente, que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \ln x_k$? Justifiez.

iii. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^4}$$

est-elle dérivable terme à terme sur $\mathbb{R}$? Justifiez.

Question II

Étudiez la convergence des séries numériques suivantes.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\ln^2 k}{k^3+1}$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\,\mathrm{sh}(1/k)}$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3+\sin k}{k^2}$

Question III

On considère la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$

i. Étudiez la convergence de la série.

ii. Sur quel domaine la série définit-elle une fonction ?

iii. Étudiez la continuité de la fonction f définie par la série.

iv. Montrez que $f''(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ sur l'intervalle de convergence de la série.

v. Exprimez f au moyen de fonctions connues. Dans quel domaine cette expression est-elle valable ?

SOLUTION TYPE

Question I

i. Non, on ne peut pas affirmer cela si I n'est pas fermé.
Considérons par exemple la suite $\{1/k\}$, $\forall k \geq 1$. Tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $\mathtt{I} =]0,1]$ mais

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \notin]0,1]$$

Contre-exemple correct : 2 pts
Vérification de l'hypothèse : 1 pt
Négation de la thèse : 1 pt

Total i. : 4 pts

ii. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ à termes strictement positifs ($x_k > 0$, $\forall k$) est convergente, alors son terme général x_k tend vers zéro. De là, on déduit

$$\lim_{k\to+\infty} \ln x_k = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \ln x_k$ diverge donc puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

Condition nécessaire de convergence : 1 pt
Limite du terme général : 1 pt
Conclusion justifiée : 2 pts
Total ii. : 4 pts

iii. Soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{où} \quad f_k(x) = \frac{\cos(kx)}{k^4}$$

Cette série de fonctions vérifie les conditions suffisantes de dérivation terme à terme des séries de fonctions sur $\mathbb{R}$. On a en effet,

(a) $f_k \in C_1(\mathbb{R})$;

$f_k \in C_1(\mathbb{R})$: 1pt

(b) la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ puisque, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall k \geq 1$,

$$\left| \frac{\cos(kx)}{k^4} \right| \leq \frac{1}{k^4}$$

ce qui établit la convergence (absolue et uniforme) en vertu du critère de Weierstrass ;

Convergence simple justifiée sur $\mathbb{R}$: 2 pts

(c) la série des dérivées

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin(kx)}{k^3}$$

Expression de la série des dérivées : 1 pt

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque son terme général est majoré en module par le terme général d'une série numérique convergente (critère de Weierstrass) :

$$\left| \frac{-\sin(kx)}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1$$

Convergence uniforme de la série des dérivées justifiée : 2 pts
Total iii. : 6 pts

TOTAL QI : 14 PTS

Question II

i. Soit la série à termes positifs

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln^2 k}{k^3 + 1}$$

Série à termes positifs : 1 pt

On a

$$u_k = \frac{k \ln^2 k}{k^3 + 1} \sim \frac{\ln^2 k}{k^2}, \quad (k \to +\infty)$$

On a aussi

$$\ln^2 k = o\left(\sqrt{k}\right), \quad (k \to +\infty)$$

de sorte que,

$$u_k = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \quad (k \to +\infty)$$

La série converge donc puisque son terme général est négligeable par rapport à celui d'une série de Riemann convergente.

Comportement asymptotique : 2 pts
Conclusion (si justifiée) : 1 pt
Total i. : 4 pts

ii. Soit la série à termes positifs

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \operatorname{sh}(1/k)}$$

Série à termes positifs : 1 pt

Vu que $\operatorname{sh} x \sim x$, $(x \to 0)$, on peut écrire

$$u_k = \frac{1}{k^2 \operatorname{sh}(1/k)} \sim \frac{1}{k}, \quad (k \to +\infty)$$

La série diverge donc puisque son terme général est asymptotique à celui de la série harmonique qui diverge.

Comportement asymptotique : 2 pts
Divergence (si justifiée) : 1 pt
Total ii. : 4 pts

iii. Soit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{3 + \sin k}{k^2}$$

Il s'agit d'une série alternée puisque

$$u_k = (-1)^k v_k \quad \text{où} \quad v_k = \frac{3+\sin k}{k^2} > 0, \, \forall k \geq 1$$

Série pas à termes positifs : 1 pt

Pour étudier la convergence absolue de la série, on remarque que

$$|u_k| = v_k = \frac{3+\sin k}{k^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (k \to \infty)$$

Étude de la convergence absolue : 1 pt

La série converge donc absolument puisque son terme général est au plus de l'ordre de celui d'une série de Riemann convergente.

De façon alternative, on peut justifier la convergence absolue par le critère de comparaison en observant que

$$|u_k| = \frac{3+\sin k}{k^2} \leq \frac{4}{k^2}, \qquad (k \geq 1)$$

où $1/k^2$ est le terme général d'une série convergente à termes positifs.

Comportement asymptotique ou utilisation du critère de comparaison : 2 pts
Conclusion si justifiée : 1 pt

Total iii. : 5 pts
TOTAL QII : 13 PTS

Question III

i. Le terme général

$$u_k = (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$

n'étant pas positif pour tous les k, le critère du quotient est appliqué à la série des modules :

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+5}}{(2k+4)(2k+5)} \frac{(2k+2)(2k+3)}{|x|^{2k+3}} \\ &= |x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+4)(2k+5)} = |x|^{2^-} \end{aligned}$$

Formulation correcte d'un critère appliqué à la série des modules : 2 pts

Il nous assure que la série étudiée converge absolument si $|x|^2 < 1$, c'est-à-dire sur $\mathtt{I} =]-1,1[$ où $\mathtt{I}$ est l'intervalle de convergence de la série, et diverge (avec et sans module) sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Conclusion sauf en $x = \pm 1$: 2 pts

En $x = \pm 1$, le critère du quotient ne permet pas de conclure. La série des modules s'écrit

Conclusion en ± 1 : 2 pts

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}$$

où

$$\frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \sim \frac{1}{4k^2}, \quad (k \to +\infty)$$

Son terme général se comportant comme celui d'une série de Riemann convergente, la série converge absolument en $x = \pm 1$.

Conclusion sur la convergence uniforme (aussi OK si $\forall [a,b] \in [-1,1]$) : 1 pt

La série converge donc simplement et absolument sur $[-1,1]$.

La série considérée, en tant que série de puissances convergeant simplement sur le fermé borné $[-1,1]$, converge uniformément sur $[-1,1]$.

Total i. : 7 pts

ii. Puisque la série donnée converge sur $[-1,1]$, elle définit une fonction sur $[-1,1]$.

Total ii. : 1 pt

iii. La série donnée, étant une série de puissances convergeant sur le fermé borné $[-1,1]$, définit une fonction continue sur $[-1,1]$.

Justification : 1 pt
Domaine fermé : 2 pts (1 pt si ouvert)
Total iii. : 3 pts

iv. Toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence. Ainsi,

Justification de la dérivation terme à terme sur $]-1,1[$: 1 pt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$

est indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence $\mathtt{I} =]-1,1[$ et il vient

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}$$

puis

Expression en série de f'' : 1 pt

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{x}{1+x^2}$$

où la dernière égalité est obtenue en posant $q = -x^2$ dans

Utilisation correcte de la série géométrique : 1 pt
Identification de $I =]-1,1[$: 1 pt

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{pour } |q| < 1$$

En conclusion,

$$f''(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{sur } \mathtt{I} =]-1,1[$$

Total iv. : 4 pts

v. En primitivant l'expression ci-dessus, nous obtenons

Première primitivation : 1 pt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 \tag{1}$$

Pour déterminer la constante C_1, remarquons que

Première constante : 1 pt

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\bigg]_{x=0} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \cdots \bigg]_{x=0} = 0$$

et donc que l'égalité (1), en $x = 0$, devient $0 = 0 + C_1$, soit $C_1 = 0$. De là,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\, dx$$

Effectuons cette seconde primitivation par parties en posant

Seconde primitivation : 1 pt

$$\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ \\ v' = 1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ \\ v = x \end{cases}$$

Il vient successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\, x\ln(1+x^2) - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, x\ln(1+x^2) - x + \operatorname{arctg} x + C_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante C_2, notons que

Seconde constante : 1 pt

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}\bigg]_{x=0} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20} + \cdots \bigg]_{x=0} = 0$$

et donc que l'égalité (2), en $x = 0$, devient $0 = 0 + C_2$, soit $C_2 = 0$.
Finalement,

Extension du résultat au fermé $[-1,1]$: 1 pt

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x\ln(1+x^2) - x + \operatorname{arctg} x \quad \text{sur }]-1,1[$$

De plus, comme les deux membres de cette égalité sont continus sur $[-1,1]$, celle-ci se prolonge aux extrémités de l'intervalle.
En conclusion,

Total v. : 5 pts

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x\ln(1+x^2) - x + \operatorname{arctg} x \quad \text{sur } [-1,1]$$

TOTAL QIII : 20 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- Il ne suffit pas d'affirmer que l'énoncé est faux. Il faut donner un contre-exemple pour le prouver.
- Quand on donne un contre-exemple, il faut montrer que celui-ci vérifie les hypothèses et qu'il contredit la thèse. Ici, il fallait donc montrer que la suite considérée comme contre-exemple était bien convergente, que tous ses éléments appartenaient à un intervalle `I` à partir d'une certaine valeur de l'indice et que la limite de la suite n'appartenait pas à cet intervalle `I`.

ii.
- Le critère de comparaison ne peut s'appliquer dans la situation étudiée (sauf en considérant la convergence absolue) car le terme général $\ln x_k$ de la série est négatif pour k grand. En effet, puisque la série des x_k converge, son terme général x_k tend vers zéro, de sorte que $\ln x_k$ tend vers $-\infty$. L'inégalité $\ln x_k < x_k$ ne permet dès lors pas de justifier la convergence de la série des $\ln x_k$.
- Pour qu'une série converge, que son terme général soit de signe variable ou non, il faut que son terme général tende vers zéro. Dès qu'il a été montré que ce n'est pas le cas de $\ln x_k$, on peut conclure que la série correspondante diverge. Ceci ne dépend pas de la façon dont x_k tend vers zéro.
- Les raisonnements présentés font apparaître une mauvaise connaissance du comportement de la fonction logarithme. Rappelons que
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
et qu'on ne peut donc écrire
$$\ln 0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ln x \sim x,\ (x \to 0^+)$$
comme on peut malheureusement le lire dans de nombreuses copies.

iii.
- On notera que la série de fonctions à considérer ici n'est pas une série de puissances. Il n'est donc pas correct d'utiliser les résultats particuliers relatifs à ce type de séries de fonctions.
- L'application du théorème relatif à la dérivation terme à terme des séries de fonctions demande d'en lister les trois hypothèses et de les vérifier sur $\mathbb{R}$ dans le cadre de la série de fonctions donnée.
  - ◇ La première hypothèse est la continue dérivabilité des fonctions.
  - ◇ La deuxième hypothèse est la convergence simple de la série.
  - ◇ La troisième hypothèse est la convergence uniforme de la série des dérivées.
- Dans ce problème, le critère de Weierstrass constitue l'outil pratique qui permet de démontrer la convergence simple de la série de fonctions (hypothèse 2) ainsi que la convergence uniforme de la série des dérivées (hypothèse 3).
  Ce critère doit être appliqué à la série des modules et consiste à montrer que le module du terme général d'une série de fonctions est majoré par celui d'une série numérique convergente sur l'intervalle considéré. Il justifie alors la convergence absolue et uniforme de la série.
  Il est appliqué ici deux fois sur $\mathbb{R}$. Une première fois pour démontrer la convergence absolue de la série de fonctions considérée et une deuxième fois pour démontrer la convergence uniforme de la série des dérivées. Il ne faut pas confondre ce critère avec le critère de comparaison relatif aux séries numériques.
- La dérivation terme à terme de la série de fonctions doit se faire par rapport à la variable x et pas par rapport à l'indice sommatoire k de la série.

Question II

Dans l'étude de la convergence des séries numériques, il convient de prendre en compte les considérations générales suivantes.

- Il faut distinguer les séries à termes positifs (items i. et ii.) des séries dont le signe du terme général est variable (item iii.) car les critères applicables sont différents. La première étape dans l'étude de la convergence d'une série numérique doit donc porter sur cette distinction entre séries à termes positifs et de signe variable.
- Les critères de comparaison, du quotient, de la racine et en k^α ne s'appliquent qu'à des séries à termes positifs. Si le terme général de la série n'est pas toujours positif, il faut appliquer le critère à la série des modules, ce qui permet ici, dans l'item iii., de justifier la convergence absolue de la série.
- Il ne faut pas confondre le critère de comparaison et le critère en k^α. Même si les deux critères partagent la même idée de base (convergence si le terme général se comporte comme ou mieux que celui d'une série convergente et divergence si le terme général se comporte comme ou moins bien que celui d'une série divergente), les formalismes sont assez différents.
  Le critère en k^α se base sur le comportement asymptotique pour $k \to +\infty$ et utilise comme référence les séries de Riemann.
  Le critère de comparaison se base sur une majoration pour $k \geq N$ où N est à déterminer et utilise comme référence n'importe quelle série à termes positifs ad hoc.
  Ces deux critères peuvent être utilisés pour justifier la convergence absolue dans l'item iii. (voir solution-type).
- Que ce soit via le critère de comparaison ou le critère en k^α, aucune conclusion ne peut être tirée si le terme général se comporte mieux que celui d'une série divergente ou moins bien que celui d'une série convergente.

Les commentaires suivants sont spécifiques aux trois séries numériques proposées.

i.
- Les copies font apparaître une mauvaise connaissance du comportement de la fonction logarithme. Rappelons que
$$\lim_{k \to +\infty} \ln k = +\infty$$
et qu'on ne peut donc affirmer que le logarithme est borné à l'infini.
- La série est à termes positifs. Il faut le préciser avant d'appliquer un critère réservé à ce type de séries.
- La présence d'un logarithme dans le terme général de la série fait en sorte que celui-ci n'est pas asymptotique à celui d'une série de Riemann. On peut cependant raisonner en deux temps.
  D'abord, on note que
$$\frac{k \ln^2 k}{k^3+1} \sim \frac{\ln^2 k}{k^2}, \ (k \to +\infty)$$
  Ensuite, on remarque que, puisque $\ln k$, et donc $\ln^2 k$, sont négligeables à l'infini par rapport à n'importe quelle puissance positive de k, la présence du facteur $\ln^2 k$ au numérateur du membre de droite ne fait que réduire très légèrement la décroissance de celui-ci au voisinage de l'infini. On peut par exemple écrire $\ln^2 k = o(\sqrt{k})$, $(k \to +\infty)$ de sorte que
$$\frac{k \ln^2 k}{k^3+1} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \quad (k \to +\infty)$$
  ce qui permet d'établir la convergence de la série proposée.
  Remarquons que tout résultat du type $\ln^2 k = o(k^\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < 1$ pouvait être utilisé ici pour démontrer la convergence de la série.
- Rappelons qu'aucune conclusion ne peut être tirée si le terme général de la série est négligeable par rapport à celui d'une série de Riemann divergente. En particulier ici, considérer que $\ln^2 k = o(k)$,

$(k \to +\infty)$ est bien sûr correct mais n'est d'aucune utilité car écrire

$$\frac{k \ln^2 k}{k^3+1} = o\left(\frac{1}{k}\right), (k \to +\infty)$$

ne nous apprend rien puisque la série harmonique est divergente.

- Les notations "$\sim$"et "$=$" ne sont pas équivalentes. Il faut veiller à les utiliser correctement.
  Pour caractériser le comportement asymptotique du terme général d'une série, on pourra par exemple écrire
  $$\frac{k \ln^2 k}{k^3+1} \sim \frac{\ln^2 k}{k^2}, \quad (k \to \infty)$$
  en ayant soin d'indiquer que ce comportement est valable au voisinage de l'infini. Par contre, l'écriture
  $$\frac{k \ln^2 k}{k^3+1} \sim \frac{\ln^2 k}{k^2}$$
  est incomplète car elle n'indique pas dans quel voisinage les deux membres sont comparés l'un à l'autre. L'expression
  $$\frac{k \ln^2 k}{k^3+1} = \frac{\ln^2 k}{k^2}, \quad (k \to \infty)$$
  est aussi incorrecte car il n'existe pas de valeurs de k pour lesquelles les deux membres sont égaux.
- Les notations "$\sim$" et "o" doivent également être utilisée à bon escient. Le fait que $\ln k$ soit négligeable par rapport à n'importe quelle puissance positive de k au voisinage de l'infini conduit à
  $$k \ln^2 k = o(k^{3/2}), \quad (k \to \infty)$$
  Par contre, on ne peut pas écrire
  $$k \ln^2 k \sim k \quad \text{ou} \quad k \ln^2 k = o(k), \quad (k \to \infty)$$
- Rappelons que la relation $f = o(g)$ au voisinage de l'infini peut être justifiée en vérifiant que
  $$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{g(k)} = 0 \quad \text{et non} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{g(k)}{f(k)} = 0$$

ii.
- La série donnée est une série est à termes positifs. Il faut le préciser avant d'appliquer un critère réservé à ce type de séries.
- La connaissance du comportement asymptotique du sinus hyperbolique au voisinage de 0 permet d'écrire
  $$u_k = \frac{1}{k^2 \operatorname{sh}(1/k)} \sim \frac{1}{k}, (k \to +\infty)$$
  et de conclure à la divergence de la série, le module de son terme général se comportant comme celui de la série harmonique.

iii.
- La série donnée n'est pas une série à termes positifs. Il s'agit d'une série alternée. En effet, son terme général $u_k = (-1)^k v_k$ avec v_k de signe constant puisque
  $$v_k = \frac{3+\sin k}{k^2} > 0$$
  Il faut donc commencer par étudier la convergence absolue de la série. Comme mentionné ci-dessus, cette convergence absolue peut être justifiée en utilisant le critère de comparaison ou le critère en k^{α}.
- Puisque la série des modules converge, il n'est pas utile d'étudier la semi-convergence de la série.
  Remarquons d'ailleurs que cette semi-convergence ne pourrait pas être justifiée ici car les hypothèses du théorème sur la semi-convergence des séries alternées ne sont pas vérifiées puisque le terme général ne décroît pas monotonement.

Question III

i.
- Le critère du quotient doit être appliqué pour étudier la convergence absolue de la série. Il faut donc évaluer
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \quad \text{où} \quad |u_k| = \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$
Afin d'exprimer u_{k+1}, il faut ajouter une unité à l'indice k, soit
$$|u_{k+1}| = \frac{|x|^{2[k+1]+3}}{(2[k+1]+2)(2[k+1]+3)} = \frac{|x|^{2k+5}}{(2k+4)(2k+5)}$$
- Si la divergence de la série des modules est obtenue par le critère de la racine, ou du quotient comme c'est le cas ici si $x^2 > 1$, on est également assuré de la divergence de la série sans module. Il n'y a donc pas lieu dans ce cas d'étudier la semi-convergence de la série.
- Le critère du quotient ne permet pas de conclure ici quand $x = \pm 1$. Il faut donc appliquer un autre critère aux deux séries numériques correspondantes. Il s'agit de série alternées dont il faut commencer par étudier la convergence absolue.
- Rappelons que la condition $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ n'est qu'une condition nécessaire de convergence. On ne peut donc pas justifier la convergence de ces deux séries numériques en se basant sur le seul fait que leur terme général tend vers 0.
- Il ne faut pas confondre l'intervalle de convergence $\mathtt{I}$ de la série de puissances avec son domaine de convergence. Par définition, l'intervalle de convergence est un ouvert même si la série de puissances converge en l'une ou l'autre, voire aux deux extrémités de son intervalle de convergence. Dans cet exercice, l'intervalle de convergence est $\mathtt{I} =]-1,1[$ alors que la série converge sur $[-1,1]$.
- Quand on étudie la convergence d'une suite ou d'une série de fonctions, il convient de distinguer les notions de convergence simple (point par point) et de convergence uniforme (sur un intervalle).
  Dans le cas des séries de puissances, on dispose d'un premier résultat théorique qui établit la convergence uniforme sur tout intervalle fermé borné compris dans l'intervalle de convergence. Dans le problème envisagé, l'intervalle de convergence est $\mathtt{I} =]-1,1[$. Dès lors, l'application du résultat théorique justifie la convergence uniforme sur tout $[\alpha,\beta] \subset]-1,1[$.
  On dispose également d'un second résultat théorique qui affirme que toute série de puissances convergeant en une extrémité $\tilde{x}$ de sont intervalle de convergence $\mathtt{I}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta] \subset \mathtt{I} \cup \{\tilde{x}\}$. La série considérée convergeant en -1 et en $+1$, on peut invoquer ce second résultat pour affirmer que la série converge uniformément sur tout $[\alpha,\beta] \subset [-1,+1]$, puisque $\mathtt{I} \cup \{-1,+1\} = [-1,+1]$. En particulier, la série considérée converge donc uniformément sur $[-1,+1]$.

ii. /

iii. Le résultat théorique relatif à la continuité des séries de puissances devait être mentionné pour justifier la continuité sur $\mathtt{I}\bigcup\{-1,1\} = [-1,1]$.

iv.
- Le résultat théorique relatif à la dérivation terme à terme des séries de puissances sur leur intervalle de convergence $\mathtt{I}$ devait être mentionné pour justifier l'expression de $f''(x)$.
- Quand un développement en série connu est utilisé pour obtenir le développement en série d'une autre fonction, il ne faut pas oublier d'adapter l'intervalle de convergence. L'intervalle de convergence de la nouvelle série s'obtient facilement par construction. Par exemple ici, la série géométrique converge pour $q \in]-1,1[$. Si on utilise le développement en remplaçant q par $-x^2$, la convergence sera assurée pour $-x^2 \in]-1,1[$, soit $x \in]-1,1[$.

v.
- Connaissant l'expression analytique de $f''(x)$, il fallait primitiver deux fois celle-ci pour obtenir l'expression analytique de $f(x)$. Il ne fallait pas oublier les constantes d'intégration qui pouvaient être déterminées en évaluant la série et sa dérivée en $x = 0$.
- L'expression analytique de $f(x)$ établie sur $]-1,1[$ peut être étendue par continuité aux extrémités de cet intervalle puisque la série et son expression analytique sont continues en $x = \pm 1$.