Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0502 - Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Avril 2025

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de trois heures.

Question I

Étudiez l'existence des intégrales suivantes :

i. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$ ii. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2(1-\mathrm{e}^{-x})}\,dx$

Question II

On considère une fonction $f \in C_2(\mathbb{R})$ et la fonction I définie par

$$I(x) = \int_0^x dv \int_0^v f''(u)\,du \qquad (\dagger)$$

i. Montrez que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et calculez $I(x)$ en suivant l'ordre des intégrations partielles utilisé dans la définition (†) de I.

ii. Permutez l'ordre des intégrations partielles apparaissant dans (†), en justifiant théoriquement, et déduisez-en une expression de la formule de MacLaurin d'ordre 1 pour f dans laquelle le reste est exprimé sous la forme intégrale

$$\mathcal{R}_1(x) = \int_0^x (x-u) f''(u)\,du$$

Question III

On considère une aile d'avion de longueur ℓ dont la section constante Σ est délimitée par une portion d'ellipse ABC et des arcs paraboliques CD et AD qui se rattachent tangentiellement en A et C à la portion d'ellipse. Les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et D sont respectivement $(0,-b/2)$, $(-a/3,0)$, $(0,b/2)$ et $(2a/3,0)$ où a et b sont des constantes strictement positives avec $b<a$.

L'ellipse est décrite par l'équation

$$\left(\frac{x}{a/3}\right)^2 + \left(\frac{y}{b/2}\right)^2 = 1$$

Les arcs paraboliques ont pour équations

$$y = +\frac{b}{2}\left(1-\frac{9x^2}{4a^2}\right) \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{b}{2}\left(1-\frac{9x^2}{4a^2}\right)$$

i. Représentez la section Σ de l'aile ainsi décrite en indiquant les points A, B, C et D.

ii. Déterminez le moment d'inertie J_x de l'aile par rapport à l'axe OX, soit

$$J_x = \ell \iint_\Sigma y^2 \rho\,d\sigma$$

où ρ désigne la masse volumique uniforme de l'aile.

Question I

i. Soit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$$

Continuité de l'intégrande sur $[1,+\infty[$: 1 pt

On a

$$\frac{\ln^2 x}{x^2} \in C_0([1,+\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Dans ce voisinage, on peut écrire $\ln^2 x = o(\sqrt{x})$. On en déduit que

$$\frac{\ln^2 x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (x \to +\infty)$$

Conclusion correctement justifiée (inutile de démontrer le comportement asymptotique par un calcul de limite) : 2 pts

de sorte que la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$ et que l'intégrale existe.

Total i. : 3 pts

ii. Soit

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx$$

On a

$$\frac{1}{x\ln x} \in C_0([2,+\infty[)$$

Continuité sur $[2,+\infty[$: 0.5 pt seulement accordé si seul élément de réponse correct.

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.
Il est possible de déterminer une primitive $F(x)$ de $1/(x\ln x)$ sur $[2,+\infty[$,

$$F(x) = \ln(\ln x)$$

telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty$$

Conclusion correctement justifiée : 3 pts

La limite de cette primitive pour $x \to +\infty$ n'étant pas finie, on en déduit que l'intégrale n'existe pas en vertu de la contraposée du théorème fondamental du calcul intégral.

Total ii. 3 pts

iii. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2(1-\mathrm{e}^{-x})}\, dx$$

Continuité sur $]0,+\infty[$: 0.5 pt, seulement accordé si pas de valorisation au voisinage de 0.

On a

$$\frac{1}{x^2(1-\mathrm{e}^{-x})} \in C_0(]0,+\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

On sait que

$$\frac{1}{x^2(1-\mathrm{e}^{-x})} \sim \frac{1}{x^2}, \qquad (x \to +\infty)$$

Intégrabilité au voisinage de $+\infty$ correctement justifiée : 1pt, seulement accordé si pas de valorisation au voisinage de 0.

Dès lors, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Exploitant le résultat connu $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + O(x^2)$, $(x \to 0^+)$, on a

$$\frac{1}{x^2(1-\mathrm{e}^{-x})} \sim \frac{1}{x^2[1-(1-x)]} = \frac{1}{x^3}, \quad (x \to 0^+)$$

Non-intégrabilité au voisinage de 0 correctement justifiée : 3 pts

de sorte que la fonction considérée n'est pas intégrable au voisinage de l'origine.

En conclusion, l'intégrale n'existe pas.

Total iii. : 3 pts

TOTAL QI : 9 PTS

Question II

i. En utilisant la définition (†), on calcule

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \left(\int_0^v f''(u)\, du \right) dv \\ &= \int_0^x \left[f'(u) \right]_0^v dv = \int_0^x \Big(f'(v) - f'(0) \Big)\, dv \\ &= \Big[f(v) - v f'(0) \Big]_0^x \\ &= f(x) - x f'(0) - f(0) \qquad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Calculs : 3 pts

Principe : définition de la fonction = existence des intégrales : 0.5 pt

Les intégrales simples évaluées successivement, soit

$$\int_0^v f''(u)\, du \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \Big(f'(v) - f'(0) \Big)\, dv$$

existent quel que soit $x \in \mathbb{R}$ puisque $f \in C_2(\mathbb{R})$ et qu'il s'agit donc chaque fois d'évaluer l'intégrale d'une fonction continue sur un compact. Dès lors, la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$.

Justification de l'existence des intégrales (aussi OK par justification de l'intégrale double) : 1 pt

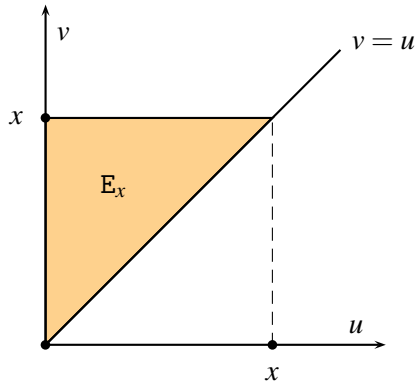
Total i. : 4.5 pts

ii. Permutons l'ordre des intégrations partielles intervenant dans la définition de I en considérant l'expression (†) comme une réduction d'une intégrale double, *i.e.*

$$I(x) = \int_0^x dv \int_0^v f''(u)\, du = \iint_{\mathtt{E}_x} f''(u) du dv$$

Le domaine d'intégration est décrit par

$$\begin{aligned} \mathtt{E}_x &= \{(u,v) \ : \ v \in [0,x],\ u \in [0,v]\} \\ &= \{(u,v) \ : \ u \in [0,x],\ v \in [u,x]\} \end{aligned}$$



Identification mathématique ou graphique du domaine $\mathtt{E}_x$: 1 pt

Dès lors, l'intégrale double peut aussi être réduite sous la forme

$$I(x) = \int_0^x \left[\int_u^x f''(u)\, dv \right] du \qquad (\heartsuit)$$

Expression de l'intégrale avec changement de l'ordre : 1.5 pt

La justification de la permutation de l'ordre des intégrations partielles et de l'égalité entre les formes différentes ainsi obtenues repose sur l'existence de l'intégrale double

$$\iint_{\mathtt{E}_x} f''(u) du dv$$

Puisque $f \in C_2(\mathbb{R})$, l'intégrande $g(u,v) = f''(u)$ est continu sur $\mathbb{R}^2$. Dès lors, l'intégrale double existe quel que soit $x \in \mathbb{R}$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le compact $\mathtt{E}_x$. Le théorème de Fubini assure que l'intégrale double définissant I peut dès lors être évaluée dans n'importe quel ordre d'intégration et que les différentes expressions correspondant aux différents ordres d'intégration partielle sont égales.

Existence de l'int. double : 1 pt

Égalité des ordres d'intégration partielle par appel à Fubini : 1.5 pt

En exploitant (♡), on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \left[\int_u^x f''(u)\, dv \right] du = \int_0^x \Big[v f''(u) \Big]_u^x du \\ &= \int_0^x (x-u) f''(u)\, du \qquad (\diamondsuit) \end{aligned}$$

Valeur de l'intégrale : 1.5 pt

En égalant les expressions ♠ et ♢ obtenues pour $I(x)$, on obtient

$$f(x) - xf'(0) - f(0) = \int_0^x (x-u) f''(u)\, du$$

ou encore

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-u) f''(u)\, du$$

qui constitue l'expression de la formule de MacLaurin recherchée avec l'expression intégrale du reste

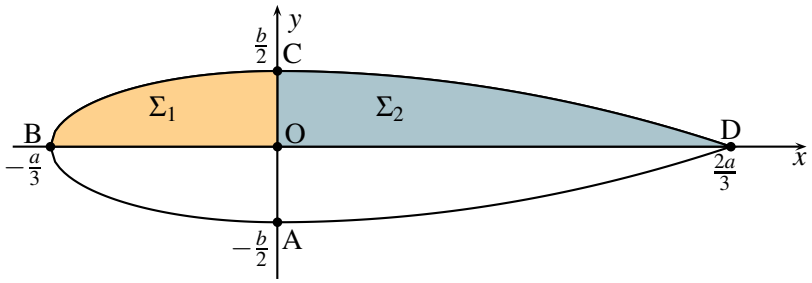
$$\mathcal{R}_1(x) = \int_0^x (x-u) f''(u)\, du$$

Formule de MacLaurin correcte avec expression intégrale du reste : 1 pt

Total ii. : 7.5 pts
TOTAL QII : 12 PTS

Question III

i. La section Σ de l'aile d'avion peut être représentée comme ci-dessous.



Représentation correcte : 1 pt
Coordonnées et positions des points A, B, C et D : 1 pt

Total i. : 2 pts

ii. L'aile est symétrique par rapport à l'axe OX et la fonction ρy^2, où ρ est une constante, à intégrer sur l'aile est paire en y. L'intégrale à calculer vaut donc deux fois l'intégrale sur la surface située au-dessus de l'axe OX. Cette surface est elle-même composée de la portion Σ_1 sous l'ellipse et de la portion Σ_2 sous la parabole. Ainsi

$$J_x = 2\ell\rho \iint_{\Sigma_1} y^2\, d\sigma \; + \; 2\ell\rho \iint_{\Sigma_2} y^2\, d\sigma = 2\ell\rho I_1 + 2\ell\rho I_2$$

Pas de pénalité si la symétrie n'est pas prise en compte pour simplifier le calcul.
Décomposition du calcul en deux parties ($I = I_1 + I_2$) : 1 pt

Le domaine Σ_1 apparaissant dans l'intégrale

$$I_1 = \iint_{\Sigma_1} y^2\, d\sigma$$

peut être décrit en faisant varier x de $-a/3$ à 0 et, pour x fixé, y de 0 à la valeur positive de y sur l'ellipse, c'est-à-dire à

$$\frac{b}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a/3}\right)^2}$$

L'intégrale I_1 peut donc s'écrire

Réduction de I_1 : 3 pts

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a/3}^{0} \left(\int_0^{\frac{b}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a/3}\right)^2}} y^2 dy \right) dx \\ &= \int_{-a/3}^{0} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a/3}\right)^2}} dx \\ &= \frac{b^3}{24} \int_{-a/3}^{0} \left[1 - \left(\frac{x}{a/3} \right)^2 \right]^{3/2} dx \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable *Calcul de I_1 : 2 pts*

$$x = \frac{a}{3}\sin t, \quad dx = \frac{a}{3}\cos t dt, \quad x = -a/3 \to t = -\pi/2, \quad x = 0 \to t = 0$$

L'intégrale se transforme alors en

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{ab^3}{72}\int_{-\pi/2}^{0} \cos^4 t \, dt = \frac{ab^3}{72}\int_{-\pi/2}^{0} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{ab^3}{288}\int_{-\pi/2}^{0} (1+\cos^2 2t + 2\cos 2t)\, dt \\ &= \frac{ab^3}{288}\int_{-\pi/2}^{0} \left(1 + \left[\frac{1+\cos 4t}{2}\right] + 2\cos 2t\right) dt \\ &= \frac{ab^3}{288}\int_{-\pi/2}^{0} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 4t}{2} + 2\cos 2t\right) dt \\ &= \frac{ab^3}{288}\left[\frac{3t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + \sin 2t\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{\pi ab^3}{384} \end{aligned}$$

Valeur de I_1 : 1 pt

Pour calculer

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} y^2 \, d\sigma$$

on observe que le domaine Σ_2 peut être décrit en faisant varier x de 0 à $2a/3$ et, pour x fixé, y de 0 à la valeur de y sur la parabole située au-dessus de l'axe OX, c'est-à-dire à

$$\frac{b}{2}\left(1 - \frac{9x^2}{4a^2}\right)$$

L'intégrale I_2 peut donc s'écrire *Réduction de I_2 : 3 pts*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2a/3} \left(\int_0^{\frac{b}{2}\left(1-\frac{9x^2}{4a^2}\right)} y^2 dy\right) dx \\ &= \int_0^{2a/3} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{2}\left(1-\frac{9x^2}{4a^2}\right)} dx \\ &= \int_0^{2a/3} \frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}\left(1 - \frac{9x^2}{4a^2}\right)\right]^3 dx \\ &= \frac{b^3}{24}\int_0^{2a/3} \left(1 - \frac{9x^2}{4a^2}\right)^3 dx \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable *Calcul de I_2 : 2 pts*

$$u = \frac{3x}{2a}, \quad dx = \frac{2a}{3}du, \quad x = 0 \to u = 0, \quad x = 2a/3 \to u = 1$$

L'intégrale se transforme alors en

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{ab^3}{36}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^3 du = \frac{ab^3}{36}\int_0^1 \left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right) du \\ &= \frac{ab^3}{36}\left[u - u^3 + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right]_0^1 \\ &= \frac{ab^3}{36}\left(1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{4ab^3}{315} \end{aligned}$$

Valeur de I_2 : 1 pt

Finalement,

$$J_x = 2\rho\ell ab^3\left(\frac{\pi}{384}+\frac{4}{315}\right) = \rho\ell ab^3\left(\frac{\pi}{192}+\frac{8}{315}\right)$$

Remarquons que ce résultat a bien les dimensions d'un moment d'inertie, c'est-à-dire celles d'une masse ($\rho\ell ab$) multipliée par une longueur au carré (b^2).

Valeur de J_x : 1 pt
Total ii. : 14 pts
TOTAL QIII : 16 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- Les fonctions $\ln x$, et donc aussi $\ln^2 x$, sont négligeables par rapport à n'importe quelle puissance de x au voisinage de $+\infty$. On ne peut donc pas écrire

$$\frac{\ln^2 x}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}, \quad (x \to +\infty)$$

mais bien, en utilisant le fait que $\ln^2 x$ est négligeable par rapport à $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{\ln^2 x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (x \to +\infty)$$

- Quand on écrit un comportement asymptotique utilisant $\sim$, o ou O, il est indispensable d'indiquer le voisinage dans lequel ce comportement est valable.
- Le fait qu'une fonction tende vers zéro au voisinage de $+\infty$ ne signifie pas forcément qu'elle y est intégrable. Il s'agit d'une condition nécessaire d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ mais ce n'est pas suffisant. C'est seulement le cas si cette fonction décroît 'suffisamment rapidement'.

ii.
- On peut écrire

$$\frac{1}{x\ln x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to +\infty)$$

mais ceci ne permet pas de conclure puisque la relation indique seulement que l'intégrande se comporte "mieux" qu'une fonction qui n'est pas intégrable.
- La fonction $\ln x$ est négligeable par rapport à n'importe quelle puissance de x au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire

$$\ln x = o(x^\varepsilon),\ \forall \varepsilon > 0, \quad (x \to +\infty)$$

Tout comme on ne peut pas déduire que $1/2 < 1/3$ du fait que $2 < 3$, on ne peut pas en déduire que

$$\frac{1}{\ln x} = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right),\ \forall \varepsilon > 0, \quad (x \to +\infty)$$

- Quand les critères pratiques d'intégrabilité ne permettent pas de conclure, il faut utiliser les critères basés sur la connaissance d'une primitive de l'intégrande. Ici, cette primitive n'a pas une limite finie en $+\infty$ de sorte que l'intégrale n'existe pas. On se rappelle en effet que, si l'intégrale existait, ses primitives admettraient une limite finie en $+\infty$.

iii. /

Question II

i.
- La fonction $I(x)$ est définie dans l'énoncé par une succession de deux intégrales simples. Le domaine de définition de I est donc constitué de l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles ces deux intégrales simples évaluées successivement existent.
  Comme le montre l'exemple 5.26 des notes de cours, il est possible qu'une succession de deux intégrales simples ait du sens sans que l'intégrale double n'existe. Il convient dès lors de ne pas considérer a priori que le domaine de définition de I est l'ensemble des x garantissant l'existence de l'intégrale double
  $$\iint_{E_x} f''(u)dudv$$
- Par le théorème de Fubini, on sait que l'existence de l'intégrale double
  $$\iint_{E_x} f''(u)dudv$$
  assure l'existence de chacune des réductions de cette intégrale, et donc de $I(x)$. On peut donc affirmer que $I(x)$ est définie pour toutes les valeurs de x pour lequelles l'intégrale double existe mais il faut pour cela vérifier l'hypothèse centrale du théorème de Fufini, à savoir que $f \in \mathbb{L}_1(E_x)$. Dans le cas général, cette démarche ne permet pas d'identifier toutes les valeurs de x constituant le domaine de définition de I.
- Comme la définition de I comporte deux intégrales simples successives, il faut justifier successivement l'existence de ces *deux* intégrales simples, *i.e.* de
  $$\int_0^v f''(u)du \qquad \text{et de} \qquad \int_0^x (f'(v) - f'(0))dv$$
  La justification de l'existence de la seule première intégrale ne suffit pas.
- Quand on effectue un raisonnement abstrait, il convient d'éviter d'introduire des hypothèses ou des simplifications qui ne sont présentes dans l'énoncé. En l'espèce, rien ne permettait de supposer que $f(0) = 0$.
- Il ne faut pas confondre des intégrales simples successives avec un produit d'intégrales. Que ce soit au niveau de l'existence ou du calcul, les expressions
  $$\int_0^x dv \int_0^v f''(u)du \qquad \text{et} \qquad \left(\int_0^x dv\right)\left(\int_0^v f''(u)du\right)$$
  ne doivent pas être confondues. La première expression doit être interprétée comme
  $$\int_0^x \left(\int_0^v f''(u)du\right) dv$$
- On ne peut relier (directement) le fait que I est définie sur $\mathbb{R}$ à l'intégrabilité de f ou de f'' sur $\mathbb{R}$.
- On ne peut justifier l'existence d'une intégrale simple par le seul argument de la continuité de l'intégrande sur le domaine d'intégration que si ce domaine est un compact. La continuité d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ ne permet pas de justifier que $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la fonction $f(x) = 1$.

ii.
- L'égalité des intégrales obtenues en permutant l'ordre d'intégration ne peut être justifiée qu'en faisant appel au théorème de Fubini, *i.e.* en s'appuyant sur l'existence de l'intégrale double
  $$\iint_{E_x} f(u)dudv$$
  Sans cette hypothèse, les successions d'intégrales simples correspondant à des ordres d'intégration partielle différents peuvent ne pas conduire à la même valeur (ou ne pas exister simultanément). L'exemple 5.26 des notes de cours illustre cette possibilité.

- Le critère de Tonelli, affirme seulement que l'intégrale double existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction *en module* qui a du sens, *i.e.*,

$$\int_0^x \left(\int_0^v |f''(u)|du \right) dv \quad \exists \qquad \Rightarrow \qquad \iint_{E_x} f''(u)dudv \quad \exists$$

  Si f'' est de signe variable ou complexe, on a

$$\int_0^x \left(\int_0^v f''(u)du \right) dv \quad \exists \qquad \not\Rightarrow \qquad \iint_{E_x} f''(u)dudv \quad \exists$$

  Dès lors, comme indiqué dans la première remarque relative au point i, on ne peut justifier l'existence de l'intégrale double pour un x donné par le seul fait que la fonction I est définie en ce point.
- La continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f'', vue comme fonction d'une seule variable réelle, ne permet pas de justifier directement l'intégrale double

$$\iint_{E_x} f''(u)dudv$$

  Pour justifier l'existence de cette intégrale en faisant appel à la continuité de l'intégrande sur le compact $\bar{E}_x$, il convient de faire appel à la continuité de l'intégrande sur $\bar{E}_x$ en tant que fonction de deux variables.
- La permutation de l'ordre d'intégration ne se réduit pas à permuter les deux symboles d'intégration. On ne peut donc écrire

$$\int_0^x dv \int_0^v f''(u)du = \int_0^x f''(u)du \int_0^v dv$$

  Il faut aussi ajuster les bornes d'intégration.
- Pour permuter l'ordre d'intégration, il convient d'identifier le domaine d'intégration sur lequel porte l'intégrale double correspondante. Dans ce cadre, une représentation graphique de ce domaine est indispensable.

Question III

i.
- Quand on représente une fonction, il faut indiquer les coordonnées des points caractéristiques sur les axes.
- Le graphique présenté doit aussi être réalisé le plus soigneusement et précisément possible. En particulier ici, il était spécifié que la portion d'ellipse se rattachait tangentiellement aux arcs paraboliques en A et C. Ceci devait apparaitre sur le graphique.

ii.
- La fonction à intégrer étant paire en y et le domaine symétrique par rapport à l'axe OX, il était judicieux de prendre en compte cette symétrie afin de diminuer la charge de calcul.
- Le calcul des deux intégrales était un peu long mais pas compliqué. De trop nombreux étudiants ont renoncé à le réaliser. D'autres ont commis des erreurs d'inattention. Mener à bien de lourds calculs est une compétence à acquérir.
- Un changement de variables adapté permet souvent de simplifier le calcul d'une intégrale. Dans I_1, la présence de $\sqrt{1-[x/(a/3)]^2}$ devait conduire à poser $x = (a/3)\sin t$.
  Dans I_2, l'intégrande est un simple polynôme du sixième degré. Il n'y a donc aucune raison de réaliser un changement de variable faisant intervenir une fonction trigonométrique. Par contre, rebaptiser $(3x/2a)$ en u permettait d'alléger un peu les écritures.
- Quand un énoncé est posé de façon dimensionnellement correcte, les dimensions du résultat peuvent être vérifiées. Les équations des courbes étaient bien dimensionnellement correctes, a, b, x et y étant des longueurs. Le résultat devait donc avoir les dimensions d'un moment d'inertie, c'est-à-dire une masse multipliée par une longueur au carré. Ceci pouvait aussi se déduire de l'expression de J_x :

$$[J_x] = [\ell][y^2][\rho][\Sigma] = LL^2ML^{-3}L^2 = ML^2$$