Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2025

MATH0066 - COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

Étudiez la convergence des séries numériques suivantes.

i. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ ii. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)!}{k^k}$ iii. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sin(1/k)}{1+k^2}$ iv. $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$

Question II

On envisage d'utiliser le changement de variables

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

pour évaluer l'intégrale

$$\iint_{\mathtt{E}} (x-y)\, \mathrm{e}^{x^2-y^2}\, dxdy$$

où $\mathtt{E}$ est le domaine situé dans le premier quadrant et délimité par les droites $x+y=1$ et $x+y=3$ et les hyperboles $x^2-y^2=-1$ et $x^2-y^2=1$.

i. Représentez le domaine $\mathtt{E}$.
ii. Justifiez l'existence de l'intégrale.
iii. Représentez l'image $\mathtt{E}'$ de $\mathtt{E}$ par le changement de variables.
iv. Calculez l'intégrale.

Tournez la page.

Question III

Représentez schématiquement

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2 \quad \text{et} \quad x^2+y^2 \leq 3Rz\right\}$$

et calculez son volume.

Question IV

i. (a) Définir mathématiquement la notion de convergence de la suite numérique $\{x_k\}$ vers un nombre a.

   (b) De nombreuses méthodes numériques de résolution de problèmes sont itératives. Elles conduisent à déterminer une suite d'approximations successives x_0, x_1, x_2, ... de la solution recherchée. La recherche d'une solution est généralement arrêtée lorsque la différence $|x_{k+1} - x_k|$ entre deux itérés successifs devient plus petite qu'une certaine tolérance.
   Montrez que la condition

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \geq N) : |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

   constitue une condition nécessaire mais non suffisante de convergence de la suite des $\{x_k\}$.

ii. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ entraîne-t-elle la convergence de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$? Justifiez.

iii. Si $f \in C_0(]a,b[)$, peut-on en déduire que $f \in \mathbb{L}_1(]a,b[)$? Justifiez.

iv. En utilisant les critères d'intégrabilité et de non-intégrabilité basés sur le comportement des primitives de la fonction $1/x^\alpha$, déterminez toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles cette fonction est intégrable au voisinage de 0.

Question I

i. Soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

Appliquons le critère du quotient à cette série à termes positifs.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+2)!}\,\frac{k+1}{k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{(k+2)k} = 0 < 1$$

La série est donc convergente.

ii. Soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)!}{k^k}$$

Appliquons le critère du quotient à cette série à termes positifs.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+2)!}{(k+1)!}\,\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+1}\exp\left(k\ln\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{k\to+\infty} k\ln\frac{k}{k+1}\right) = \exp\left(\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln\dfrac{k}{k+1}}{\dfrac{1}{k}}\right)\end{aligned}$$

Appliquant la règle de l'Hospital, on calcule ensuite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{k+1}{k}\,\dfrac{k+1-k}{(k+1)^2}}{\dfrac{-1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{-k}{k+1} = -1$$

de sorte que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

La série est donc convergente.

iii. Soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sin(1/k)}{1+k^2}$$

Puisque $0 < 1/k < 1$, il s'agit d'une série à termes positifs. Tenant compte de ce que $\sin x \sim x$, $(x \to 0)$, on peut écrire

$$\frac{k\sin(1/k)}{1+k^2} \sim \frac{1}{k^2}, \quad (k \to +\infty)$$

La série est donc convergente.

iv. Soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

Il ne s'agit pas d'une série à termes positifs.

Le module du terme général de cette série est tel que

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{\ln k}{k}\right), \quad (k \to +\infty)$$

de sorte que la série des modules diverge.

La série est cependant semi-convergente puisque

- La série est alternée :

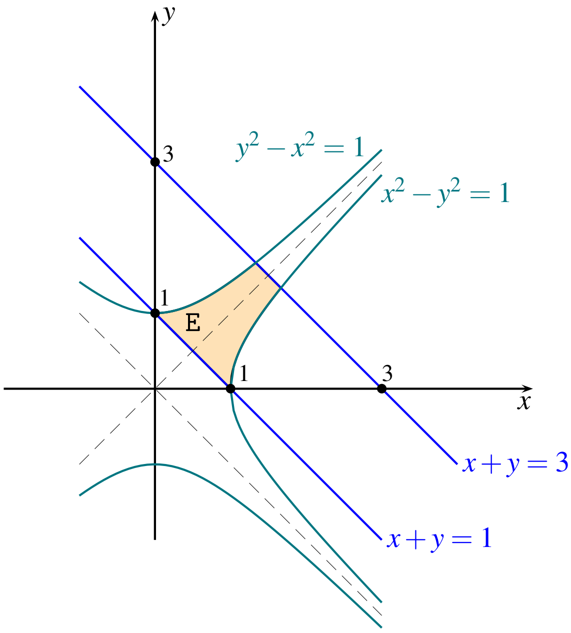
$$u_k = (-1)^k v_k \quad \text{avec} \quad v_k = \frac{\ln k}{k} \geq 0 \quad \forall k \geq 1$$

- v_k tend monotonément vers 0 pour $k \geq 3$:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\ln k}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dk}\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \frac{1 - \ln k}{k^2} < 0 \quad \forall k \geq 3$$

Question II

i. La droite $x+y=1$ passe par les points $(0,1)$ et $(1,0)$. La droite $x+y=3$ passe par les points $(0,3)$ et $(3,0)$. Les hyperboles $x^2-y^2=1$ et $y^2-x^2=1$ ont comme asymptotes les droites $x=\pm y$. L'hyperbole $x^2-y^2=1$ ne traverse pas l'axe OY et passe par le point $(1,0)$. L'hyperbole $y^2-x^2=1$ ne traverse pas l'axe OX et passe par le point $(0,1)$. Le domaine $\mathtt{E}$ est donc tel que représenté ci-dessous.



ii. L'intégrale

$$\iint_{\mathtt{E}} (x-y)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}\, dxdy$$

existe puisque l'intégrande $(x-y)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}$ est continu sur le compact $\bar{\mathtt{E}}$.

iii. Les relations définissant le changement de variables peuvent s'écrivent

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases} \tag{‡}$$

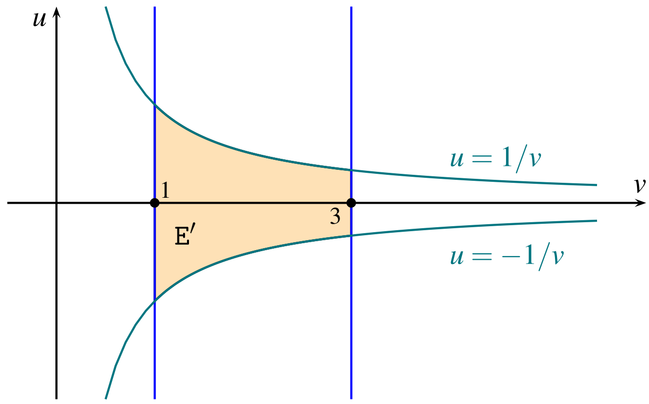
Le domaine $\mathtt{E}$ est situé entre les droites $x+y=1$ et $x+y=3$. Il peut donc être décrit en faisant varier $v=x+y$ de 1 à 3.

Le domaine $\mathtt{E}$ est aussi compris entre les hyperboles

$$y^2-x^2 = (y+x)(y-x) = -vu = 1 \quad \text{et} \quad x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = vu = 1$$

correspondant aux hyperboles équilatères $uv=1$ et $uv=-1$ dans $\mathtt{E}'$. Pour v fixé, u doit donc varier de $-1/v$ à $1/v$ pour décrire $\mathtt{E}'$.

Graphiquement, on a donc



iv. Les relations proposées (‡) définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\mathtt{E}'$ et $\mathtt{E}$ puisque
- celles-ci sont inversibles et établissent une correspondance biunivoque entre les points de ces deux ensembles ;
- les relations $x(u,v)$ et $y(u,v)$ sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathtt{E}$;
- le Jacobien

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ sur } \mathtt{E}$$

L'intégrale obtenue après application du changement de variables existe donc et est égale à l'intégrale proposée initialement.

On calcule alors,

$$I = \iint_{\mathtt{E}} (x-y)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{\mathtt{E}'} |J|\,u\,\mathrm{e}^{uv}\,dudv$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 dv \int_{-1/v}^{1/v} u\,\mathrm{e}^{uv}\,du$$

La première intégrale peut être calculée par parties. En posant $f = u$ et $g' = \mathrm{e}^{uv}$, on a

$$\int fg'\,du = fg - \int f'g\,du = \frac{u}{v}\mathrm{e}^{uv} - \int \frac{\mathrm{e}^{uv}}{v}\,du = \frac{u}{v}\mathrm{e}^{uv} - \frac{\mathrm{e}^{uv}}{v^2} = \left(\frac{u}{v} - \frac{1}{v^2}\right)\mathrm{e}^{uv}$$

de sorte que

$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\left(\frac{u}{v} - \frac{1}{v^2}\right)\mathrm{e}^{uv}\right]_{-1/v}^{1/v} dv = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2}{\mathrm{e}\;v^2}\,dv$$
$$= \frac{1}{\mathrm{e}}\int_1^3 \frac{1}{v^2}\,dv = -\frac{1}{\mathrm{e}}\left[\frac{1}{v}\right]_1^3 = -\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3\mathrm{e}}$$

Question III

Le volume recherché s'exprime par

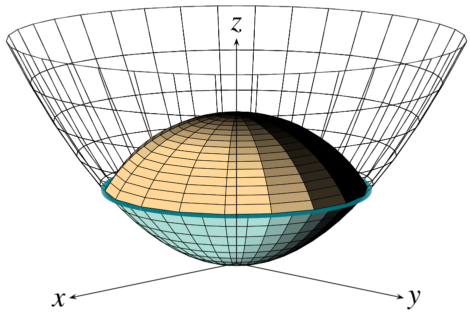
$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

où $\mathtt{E}$ est le domaine représenté ci-dessous compris à l'intérieur de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$$

et du paraboloïde

$$x^2 + y^2 = 3Rz$$



La sphère et le paraboloïde se coupent à une hauteur z telle que la distance à l'axe OZ des deux surfaces est identique, soit

$$4R^2 - z^2 = 3Rz$$

ou encore

$$z^2 + 3Rz - 4R^2 = (z-R)(z+4R) = 0$$

dont la seule solution positive est $z = R$. L'intersection entre la sphère et le paraboloïde est un cercle de rayon $\sqrt{3}R$.

Le domaine $\mathtt{E}$ peut donc être découpé en deux sous-domaines : $\mathtt{E}_1$ délimité par la surface du paraboloïde pour $z \leq R$ et $\mathtt{E}_2$ délimité par celle de la sphère pour $z \geq R$. L'intégrale peut alors être réduite en considérant un empilement de cylindres infinitésimaux de section $\Sigma_1(z)$ dont le rayon est celui du paraboloïde à la hauteur z (quand $z \leq R$) et $\Sigma_2(z)$ dont le rayon est celui de la sphère à la hauteur z (quand $z \geq R$). On a

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathtt{E}_1} dxdydz + \iiint_{\mathtt{E}_2} dxdydz \\
&= \int_0^R dz \iint_{\Sigma_1(z)} dxdy + \int_R^{2R} dz \iint_{\Sigma_2(z)} dxdy \\
&= \int_0^R dz \iint_{\text{disque de rayon } \sqrt{3Rz}} dxdy + \int_R^{2R} dz \iint_{\text{disque de rayon } \sqrt{4R^2 - z^2}} dxdy
\end{aligned}$$

soit, puisque les intégrales sur les disques de la fonction 1 représentent les aires de ces disques,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^R \pi\, 3Rz\, dz + \int_R^{2R} \pi(4R^2 - z^2)\, dz \\
&= \frac{3}{2}\pi R^3 + 4\pi R^3 - \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_R^{2R} \\
&= \left(\frac{3}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)\pi R^3 = \frac{19}{6}\pi R^3
\end{aligned}$$

De façon alternative, le domaine peut être décrit en coordonnées cylindriques.

- Une première méthode se base sur la description établie ci-dessus. On a

$$\mathtt{E}_1 = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq z \leq R \text{ et } 0 \leq r \leq \sqrt{3Rz}\}$$

et

$$\mathtt{E}_2 = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ R \leq z \leq 2R \text{ et } 0 \leq r \leq \sqrt{4R^2 - z^2}\}$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathrm{E}_1} dxdydz + \iiint_{\mathrm{E}_2} dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{3Rz}} r\,dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r\,dr \\
&= 2\pi \int_0^R \frac{3Rz}{2} dz + 2\pi \int_R^{2R} \frac{4R^2-z^2}{2} dz \\
&= \pi \int_0^R 3Rz\,dz + \pi \int_R^{2R} (4R^2-z^2)\,dz
\end{aligned}
$$

où l'on retrouve l'intégrale calculée ci-dessus.

- Il est également possible d'utiliser les coordonnées cylindriques avec

$$
\mathrm{E} = \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{3}R \text{ et } \frac{r^2}{3R} \le z \le \sqrt{4R^2-r^2}\}
$$

où les bornes de z correspondent respectivement au paraboloïde et à la sphère. Il vient dès lors

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_{\mathrm{E}} dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}R} r\,dr \int_{r^2/3R}^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R} r\left(\sqrt{4R^2-r^2} - \frac{r^2}{3R}\right) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{-(4R^2-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{12R}\right]_0^{\sqrt{3}R} \\
&= 2\pi R^3 \left(-\frac{1}{3} - \frac{9}{12} + \frac{8}{3}\right) = \frac{19}{6}\pi R^3
\end{aligned}
$$

Question IV

i. (a) On dit que la suite $\{x_k\}$ converge vers $a \in \mathbb{C}$ lorsque

$$
(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \ge N) : |x_k - a| \le \varepsilon
$$

(b) La condition

$$
(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \ge N) : |x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon \tag{†}
$$

est nécessaire. En effet, si la suite $\{x_k\}$ converge vers a alors, par définition de la convergence, on a

$$
(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \ge N) : |x_k - a| \le \varepsilon/2
$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que $\forall k \ge N$,

$$
|x_{k+1} - x_k| = |(x_{k+1} - a) + (a - x_k)| \le |x_{k+1} - a| + |a - x_k| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \le \varepsilon
$$

Toute suite convergente vérifie donc la condition proposée.
La condition (†) ne garantit cependant pas la convergence de la suite. Par exemple, si on considère la suite des sommes partielles de la série harmonique, *i.e.* la suite $\{x_k\}$ avec

$$
x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}
$$

La différence entre deux termes successifs est donnée par

$$
x_{k+1} - x_k = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \frac{1}{k+1}
$$

Celle-ci peut donc être rendue arbitrairement petite, ce qui correspond à la proposition (†). Par contre, la suite $\{x_k\}$ diverge puisque la série harmonique est divergente. La condition proposée n'est donc pas suffisante pour garantir la convergence.

ii. La série numérique de terme général

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

est convergente en tant que série alternée dont le module du terme général décroît monotonément vers zéro. Par contre, la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

est divergente.

iii. Non, si $f \in C_0(]a,b[)$, on ne peut pas en déduire que $f \in \mathbb{L}_1(]a,b[)$ comme le montre le contre-exemple de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} \in C_0(]0,1[) \quad \text{et} \quad \notin \mathbb{L}_1(]0,1[)$$

iv. La fonction $f(x) = 1/x^{\alpha}$ est réelle et continue sur l'intervalle $]0,a]$ où $a \in \mathbb{R}_0^+$et y admet une primitive

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

- Cette primitive possède une limite infinie pour x tendant vers 0 dans le cas où $\alpha \geq 1$. Dès lors, f n'est pas intégrable sur $]0,a]$ pour ces valeurs de α.
- Si $\alpha < 1$, la limite de la primitive pour x tendant vers 0 est finie. La fonction f étant de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité est assurée.

Quel que soit $a > 0$, on a donc

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \begin{cases} \in \mathbb{L}_1(]0,a[) & \text{si } \alpha < 1 \\ \notin \mathbb{L}_1(]0,a[) & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$