Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2025

MATH0066 - Compléments de Mathématiques 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. À toute suite numérique complexe $\{a_k\}$, on peut associer

- sa dérivée discrète $\{b_k\}$ définie par $b_k = a_{k+1} - a_k$;
- ses primitives discrètes $\{c_k\}$ définies par $c_k = \sum_{n=1}^{k} a_n + C$ où $C \in \mathbb{C}$ désigne une constante arbitraire.

La convergence de la suite $\{a_k\}$ implique-t-elle la convergence de sa dérivée discrète et de ses primitives discrètes ? Justifiez.

ii. On note $\mathbb{L}_2$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable, *i.e.* l'ensemble des fonctions f telles que $f^2 \in \mathbb{L}_1$. Une relation d'inclusion du type $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ ou $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_1$ existe-t-elle entre ces deux ensembles ? Justifiez.

iii. Si $f \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ et $g \in C_0([0,1])$, montrez que $fg \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$.

Question II

Étudiez la convergence de chacune des séries suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,2^k}{7^k}$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\operatorname{th} k}$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{2k+1}$

Tournez la page.

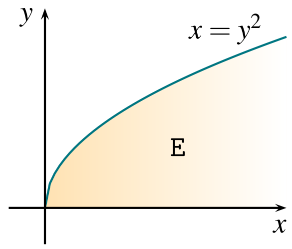
Question III

Étudiez l'existence des intégrales suivantes en discutant éventuellement en fonction du paramètre $n \in \mathbb{Z}$.

i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln^2 x}{x^3+1}\, dx$

ii. $\displaystyle\iint_{\mathtt{E}} \frac{1}{(xy)^n}\, dx\, dy$

où $\mathtt{E}$ est le domaine situé dans le premier quadrant entre l'axe OX et la parabole d'axe OX et d'équation $x = y^2$ (voir figure ci-contre).



Question IV

Justifiez l'existence et calculez l'intégrale

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,(a^2+x^2+y^2)}$$

où a est une constante strictement positive et $\mathtt{E}$ désigne le disque centré à l'origine et de rayon a.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La convergence de la suite $\{a_k\}$ se traduit par

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = a \in \mathbb{C}$$

On a donc

$$\lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{k\to+\infty} a_{k+1} - \lim_{k\to+\infty} a_k = a - a = 0 \in \mathbb{C}$$

de sorte que la dérivée discrète converge également.

Par contre, les primitives discrètes ne convergent pas forcément. Considérons par exemple la suite $\{a_k\} = \{1/k\}$. Cette suite converge puisque

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0 \in \mathbb{C}$$

mais la suite des sommes partielles

$$\{S_k\} \qquad \text{où} \qquad S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

correspond à la série harmonique qui est divergente. Les primitives discrètes de cette suite ne convergent donc pas de sorte que la convergence d'une suite n'implique pas la convergence de ses primitives discrètes.

ii. La relation $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ signifie que toute fonction intégrable est également de carré intégrable. Ceci est faux puisque, par exemple, la fonction $x^{-1/2}\delta_{]0,1[}(x)$ est intégrable alors que la fonction $x^{-1}\delta_{]0,1[}(x) = [x^{-1/2}\delta_{]0,1[}(x)]^2$ ne l'est pas.

La relation $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_1$ signifie que toute fonction de carré intégrable est également intégrable. Ceci est également faux puisque, par exemple, la fonction $x^{-2}\delta_{]1,+\infty[}(x)$ est intégrable alors que la fonction $x^{-1}\delta_{]1,+\infty[}(x)$, dont le carré est $x^{-2}\delta_{]1,+\infty[}(x)$, ne l'est pas.

iii. La fonction g étant continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée sur ce compact, *i.e.*

$$\exists C \geq 0 : |g(x)| \leq C \qquad \forall x \in [0,1]$$

Dès lors, on a

$$|f(x)g(x)| \leq C|f(x)| \qquad \forall x \in]0,1[$$

La fonction f étant intégrable sur $]0,1[$, il en est de même de la fonction $|f|$. Par le critère de Lebesgue, on en déduit que $fg \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ puisque ce produit est majoré en module par une fonction intégrable.

Question II

i. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,2^k}{7^k}$$

est à termes positifs. L'application du critère du quotient conduit à considérer

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{7^k}{7^{k+1}} = \frac{2}{7} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{7} < 1$$

La série est donc convergente.

ii. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \operatorname{th} k = 1$, le terme général de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\operatorname{th} k}$$

ne tend pas vers zéro. Dès lors, la série diverge.

iii. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{2k+1}$$

est à termes positifs uniquement si $\beta > 0$. On étudie donc la convergence absolue de la série. L'application du critère du quotient conduit à considérer

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \qquad \text{où} \qquad u_k = \frac{|\beta|^k}{2k+1}$$

soit

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{|\beta|^{k+1}}{2(k+1)+1}}{\dfrac{|\beta|^k}{2k+1}} = \lim_{k\to+\infty} |\beta| \frac{2k+1}{2k+3} = |\beta|$$

On en déduit que la série converge absolument pour toutes les valeurs de $\beta \in]-1,1[$ et diverge pour $\beta \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
Pour $|\beta| = 1$, la série s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

Elle est divergente puisqu'elle se comporte comme la série harmonique.
Pour $\beta = -1$, la série s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

La série est alternée et le module de son terme général décroît vers zéro. Elle est donc semi-convergente.
En résumé, la série converge absolument pour $\beta \in]-1,1[$, elle est semi-convergente pour $\beta = -1$ et elle diverge pour les autres valeurs de β.

Question III

i. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln^2 x}{x^3+1}\,dx$$

On a

$$\frac{x\ln^2 x}{x^3+1} \in C_0(]0,+\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{x\ln^2 x}{x^3+1} \sim \frac{\ln^2 x}{x^2}$$

de sorte que, puisqu'on a aussi $\ln^2 x = o(\sqrt{x})$, $(x \to +\infty)$,

$$\frac{x\ln^2 x}{x^3+1} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right), \qquad (x \to +\infty)$$

Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0, on a

$$\frac{x\ln^2 x}{x^3+1} \sim x\ln^2 x$$

Comme

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$$

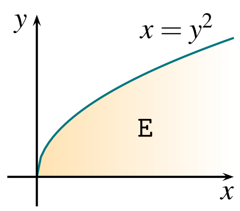
l'intégrande admet un prolongement continu pour $x \to 0^+$, ce qui assure l'intégrabilité dans ce voisinage.

En conclusion, l'intégrale existe.

ii.

Soit

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{1}{(xy)^n}\,dx\,dy \qquad \text{où}$$



Le domaine étant non borné, il est nécessaire de faire appel au critère de Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale. Il faut donc justifier l'existence d'un ordre d'intégration partielle de

$$|f(x,y)| = f(x,y) = \frac{1}{(xy)^n}$$

Le domaine $\mathtt{E}$ peut être décrit

- en faisant varier x de 0 à $+\infty$
- et, pour x fixé, y de 0 à $\sqrt{x}$.

On considère donc la succession d'intégrales partielles

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{y^n}\,dy$$

L'intégrale par rapport à y n'existe pas si $n \geq 1$ car, dans ce cas, la fonction $1/y^n$ n'est pas intégrable dans le voisinage de 0.

Si $n < 1$, la fonction $1/y^n$ est intégrable sur $]0, \sqrt{x}[$ pour presque tout x appartenant à $]0, +\infty[$. Dans ce cas, on calcule

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} \left[\frac{y^{1-n}}{1-n} \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{1-n} \int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{1-n}}{x^n} dx = \frac{1}{1-n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}(3n-1)}} dx$$

Dans cette intégrale par rapport à x, l'intégrande est continu sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, l'intégrabilité demande $(3n-1)/2 > 1$, c'est-à-dire $n > 1$, ce qui est incompatible avec la condition d'existence de la première intégrale partielle.

Le critère de Tonelli qui n'est qu'une condition suffisante d'intégrabilité ne permet cependant pas de conclure directement à la non-existence de l'intégrale double donnée.
Par contre, si l'intégrale double de $f(x,y)$ existait sur $\mathtt{E}$, Fubini nous apprend que son calcul pourrait être mené dans n'importe quel ordre d'intégration partielle et donc en particulier dans l'ordre choisi. Comme l'intégrale n'existe pas dans cet ordre, nous pouvons conclure que l'intégrale proposée n'existe pour aucune valeur de n.

$\boxed{\text{Question IV}}$

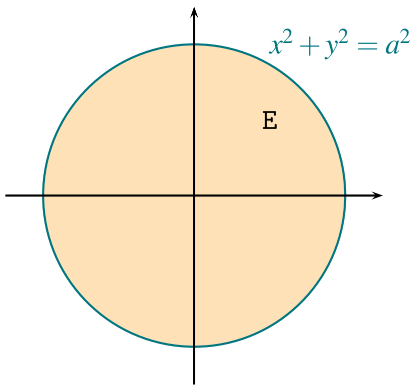
On considère

$$I = \iint_{\mathtt{E}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,(a^2+x^2+y^2)}$$

où

$$\mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2\}$$

La forme du domaine d'intégration (le disque de rayon a centré à l'origine des axes) ainsi que l'expression de l'intégrande conduisent naturellement à exprimer le problème en coordonnées polaires.



Dans ce système de coordonnées, on a $x^2+y^2 = r^2$ et, en prenant en compte le Jacobien $J = r > 0$,

$$I = \iint_{\mathtt{E}'} \frac{r}{r\,(a^2+r^2)} dr\,d\theta = \iint_{\mathtt{E}'} \frac{1}{a^2+r^2} dr\,d\theta$$

où

$$\mathtt{E}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \in]0,a], \theta \in]0, 2\pi[\}$$

Cette dernière intégrale existe puisque l'intégrande est continu sur le compact $\bar{\mathtt{E}}'$. Dès lors, l'intégrale initiale existe également puisque le changement de variables réalisé est régulier sur $\mathtt{E}'$.

On calcule ensuite successivement

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{dr}{a^2+r^2} = 2\pi \int_0^a \frac{dr}{a^2+r^2} \\ &= \frac{2\pi}{a} \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \qquad\qquad \text{où on a posé } r = au \ (dr = a\,du) \\ &= \frac{2\pi}{a} \left[\operatorname{arctg} u \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{2a} \end{aligned}$$