Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2025

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

Étudiez la convergence des séries numériques suivantes.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)!}{k^k}$ iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sin(1/k)}{1+k^2}$ iv. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$

Question II

On envisage d'utiliser le changement de variables

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

pour évaluer l'intégrale

$$\iint_{\mathrm{E}} (x-y)\, e^{x^2-y^2}\, dxdy$$

où E est le domaine situé dans le premier quadrant et délimité par les droites $x+y=1$ et $x+y=3$ et les hyperboles $x^2-y^2=-1$ et $x^2-y^2=1$.

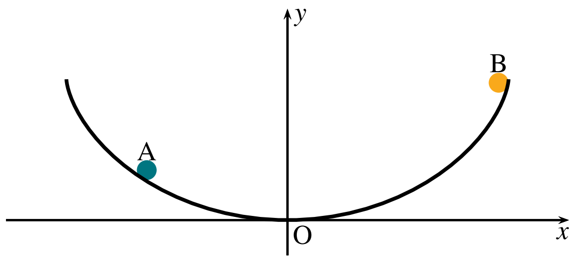
i. Représentez le domaine E.
ii. Justifiez l'existence de l'intégrale.
iii. Représentez l'image E' de E par le changement de variables.
iv. Calculez l'intégrale.

Question III

La cycloïde est une courbe plane décrite par

$$\mathbf{s}(\psi) = a(2\psi + \sin 2\psi)\mathbf{e}_x + a(1-\cos 2\psi)\mathbf{e}_y, \qquad \psi \in]-\pi/2, +\pi/2[$$

où a a les dimensions d'une longueur.



i. Calculer la longueur de la cycloïde.
ii. Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne s en fonction de ψ en prenant O comme origine.
iii. La cycloïde possède la propriété remarquable d'être isochrone : si on lâche deux particules en des points différents A et B et que celles-ci glissent sans frottement le long de la cycloïde sous l'action de la pesanteur, les deux particules prendront exactement le même temps pour atteindre le point le plus bas de la cycloïde et se rencontreront donc en O.

Pour démontrer cette propriété, on se propose de calculer le temps T nécessaire pour atteindre l'origine en partant d'une hauteur y_0 correspondant à l'abscisse curviligne $s_0 > 0$ en sachant que l'expression de la conservation de l'énergie permet de relier l'évolution temporelle de l'abscisse curviligne $s(t)$ à la hauteur $y(t)$ à l'instant considéré par

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g[y_0 - y(t)]}$$

(a) Exprimez y et y_0 en fonction de, respectivement, s et s_0 dans cette équation pour obtenir une équation différentielle du premier ordre pour $s(t)$.

(b) Calculez le temps T pour passer de $s = s_0$ à $s = 0$ et montrez que ce temps est indépendant de s_0.

Question IV

i. (a) Définir mathématiquement la notion de convergence de la suite numérique $\{x_k\}$ vers un nombre a.

(b) De nombreuses méthodes numériques de résolution de problèmes sont itératives. Elles conduisent à déterminer une suite d'approximations successives $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de la solution recherchée. La recherche d'une solution est généralement arrêtée lorsque la différence $|x_{k+1} - x_k|$ entre deux itérés successifs devient plus petite qu'une certaine tolérance.
Montrez que la condition

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \geq N) : |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

constitue une condition nécessaire mais non suffisante de convergence de la suite des $\{x_k\}$.

ii. Si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument, montrez que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin kx$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

iii. En utilisant les critères d'intégrabilité et de non-intégrabilité basés sur le comportement des primitives de la fonction $1/x^\alpha$, déterminez toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles cette fonction est intégrable au voisinage de 0.

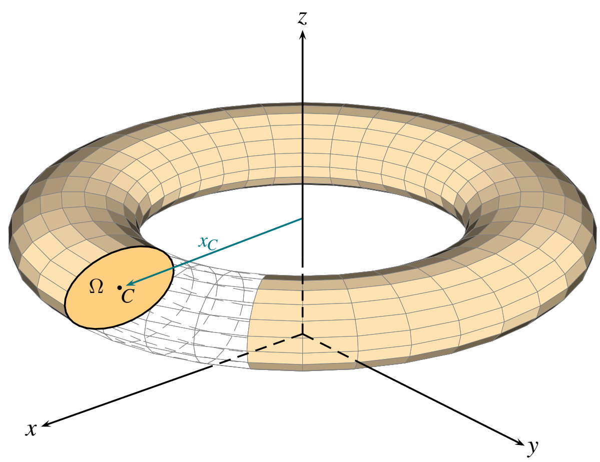
iv. Soit un élément matériel plan Ω, situé dans le plan OXZ, dont la masse par unité de surface ρ est constante et tel que l'axe OZ ne traverse pas Ω. La coordonnée x_C du centre d'inertie C de cet élément est donnée par

$$m x_\mathrm{C} = \iint_\Omega \rho \, x \, dx dz$$

où m est la masse de l'élément matériel.
On demande de démontrer le deuxième *théorème de Guldin* qui affirme que

$$x_\mathrm{C} = \frac{V}{2\pi S}$$

où S est l'aire de l'élément matériel considéré et où V est le volume du corps qui serait engendré par la rotation de Ω autour de OZ.



Question I

i. Soit
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$
Appliquons le critère du quotient à cette série à termes positifs.
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+2)!}\,\frac{k+1}{k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{(k+2)k} = 0 < 1$$
La série est donc convergente.

ii. Soit
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)!}{k^k}$$
Appliquons le critère du quotient à cette série à termes positifs.
$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+2)!}{(k+1)!}\,\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+1}\exp\left(k\ln\frac{k}{k+1}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{k\to+\infty} k\ln\frac{k}{k+1}\right) = \exp\left(\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln\dfrac{k}{k+1}}{\dfrac{1}{k}}\right)\end{aligned}$$
Appliquant la règle de l'Hospital, on calcule ensuite
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{k+1}{k}\,\dfrac{k+1-k}{(k+1)^2}}{\dfrac{-1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{-k}{k+1} = -1$$
de sorte que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$
La série est donc convergente.

iii. Soit
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sin(1/k)}{1+k^2}$$
Puisque $0 < 1/k < 1$, il s'agit d'une série à termes positifs. Tenant compte de ce que $\sin x \sim x$, $(x \to 0)$, on peut écrire
$$\frac{k\sin(1/k)}{1+k^2} \sim \frac{1}{k^2}, \quad (k \to +\infty)$$
La série est donc convergente.

iv. Soit
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$
Il ne s'agit pas d'une série à termes positifs.

Le module du terme général de cette série est tel que

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{\ln k}{k}\right), \quad (k \to +\infty)$$

de sorte que la série des modules diverge.
La série est cependant semi-convergente puisque

- La série est alternée :

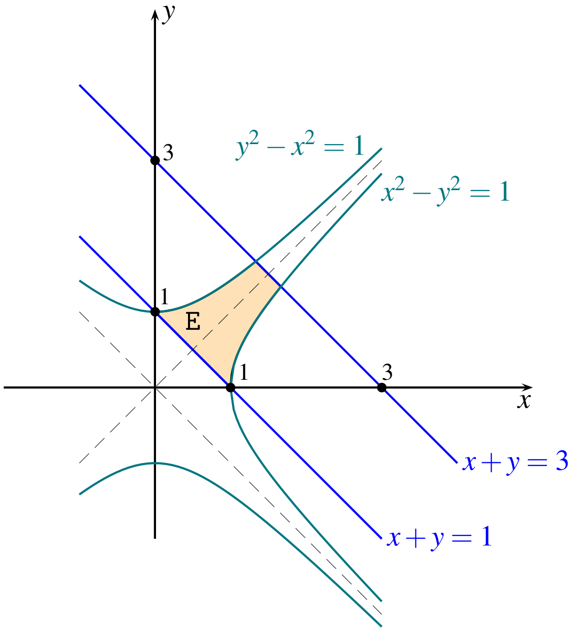
$$u_k = (-1)^k v_k \quad \text{avec} \quad v_k = \frac{\ln k}{k} \geq 0 \quad \forall k \geq 1$$

- v_k tend monotonément vers 0 pour $k \geq 3$:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\ln k}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dk}\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \frac{1 - \ln k}{k^2} < 0 \quad \forall k \geq 3$$

Question II

i. La droite $x+y=1$ passe par les points $(0,1)$ et $(1,0)$. La droite $x+y=3$ passe par les points $(0,3)$ et $(3,0)$. Les hyperboles $x^2-y^2=1$ et $y^2-x^2=1$ ont comme asymptotes les droites $x=\pm y$. L'hyperbole $x^2-y^2=1$ ne traverse pas l'axe OY et passe par le point $(1,0)$. L'hyperbole $y^2-x^2=1$ ne traverse pas l'axe OX et passe par le point $(0,1)$. Le domaine $\mathtt{E}$ est donc tel que représenté ci-dessous.



ii. L'intégrale

$$\iint_{\mathtt{E}} (x-y)\, e^{x^2-y^2}\; dxdy$$

existe puisque l'intégrande $(x-y)e^{x^2-y^2}$ est continu sur le compact $\bar{\mathtt{E}}$.

iii. Les relations définissant le changement de variables peuvent s'écrivent

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+v) \\ y = \dfrac{1}{2}(v-u) \end{cases} \tag{‡}$$

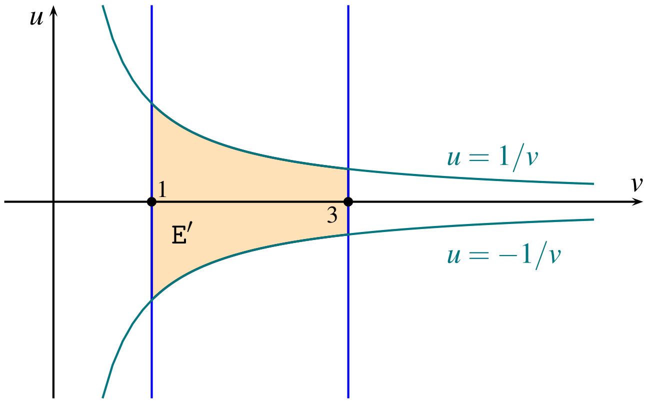
Le domaine $\mathtt{E}$ est situé entre les droites $x+y=1$ et $x+y=3$. Il peut donc être décrit en faisant varier $v = x+y$ de 1 à 3.

Le domaine $\mathtt{E}$ est aussi compris entre les hyperboles

$$y^2 - x^2 = (y+x)(y-x) = -vu = 1 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = vu = 1$$

correspondant aux hyperboles équilatères $uv = 1$ et $uv = -1$ dans $\mathtt{E}'$. Pour v fixé, u doit donc varier de $-1/v$ à $1/v$ pour décrire $\mathtt{E}'$.

Graphiquement, on a donc



iv. Les relations proposées (‡) définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\mathtt{E}'$ et $\mathtt{E}$ puisque

- celles-ci sont inversibles et établissent une correspondance biunivoque entre les points de ces deux ensembles ;
- les relations $x(u,v)$ et $y(u,v)$ sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathtt{E}$;
- le Jacobien

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ sur } \mathtt{E}$$

L'intégrale obtenue après application du changement de variables existe donc et est égale à l'intégrale proposée initialement.

On calcule alors,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathtt{E}} (x-y)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}\, dxdy = \iint_{\mathtt{E}'} |J|\, u\,\mathrm{e}^{uv}\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 dv \int_{-1/v}^{1/v} u\,\mathrm{e}^{uv}\, du \end{aligned}$$

La première intégrale peut être calculée par parties. En posant $f = u$ et $g' = \mathrm{e}^{uv}$, on a

$$\int fg'\, du = fg - \int f'g\, du = \frac{u}{v}\mathrm{e}^{uv} - \int \frac{\mathrm{e}^{uv}}{v}\, du = \frac{u}{v}\mathrm{e}^{uv} - \frac{\mathrm{e}^{uv}}{v^2} = \left(\frac{u}{v} - \frac{1}{v^2}\right)\mathrm{e}^{uv}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\left(\frac{u}{v} - \frac{1}{v^2}\right)\mathrm{e}^{uv}\right]_{-1/v}^{1/v} dv = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2}{\mathrm{e}\ v^2}\, dv \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}\int_1^3 \frac{1}{v^2}\, dv = -\frac{1}{\mathrm{e}}\left[\frac{1}{v}\right]_1^3 = -\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Question III

i. La paramétrisation de la cycloïde est donnée par

$$\mathbf{s}(\psi) = a(2\psi + \sin 2\psi)\mathbf{e}_x + a(1 - \cos 2\psi)\mathbf{e}_y, \quad \psi \in]-\pi/2, +\pi/2[$$

On a donc

$$\mathbf{s}'(\psi) = 2a(1 + \cos 2\psi)\mathbf{e}_x + 2a \sin 2\psi\, \mathbf{e}_y$$

et, puisque $\cos\psi > 0$ sur $]-\pi/2, +\pi/2[$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}'(\psi)\| &= 2a\sqrt{1 + \cos^2 2\psi + 2\cos 2\psi + \sin^2 2\psi} = 2a\sqrt{2 + 2\cos 2\psi} \\ &= 4a\sqrt{\cos^2\psi} = 4a\cos\psi \end{aligned}$$

La longueur de la cycloïde se calcule alors selon

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\mathbf{s}'(\psi)\| d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a\cos\psi\, d\psi = 4a\big[\sin\psi\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8a$$

ii. L'abscisse curviligne s de la cycloïde mesurée à partir du point O où $\psi = 0$ s'exprime par

$$s = \int_0^{\psi} \|\mathbf{s}'(t)\|\, dt = \int_0^{\psi} 4a\cos t\, dt = 4a\big[\sin t\big]_0^{\psi} = 4a\sin\psi$$

iii. (a) On a

$$y(\psi) = a(1 - \cos 2\psi) = 2a\sin^2\psi = \frac{s^2}{8a} \quad \text{et donc} \quad y_0 = \frac{s_0^2}{8a}$$

de sorte que l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g[y_0 - y(t)]}$$

peut s'écrire

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g\left(\frac{s_0^2}{8a} - \frac{s^2}{8a}\right)} = -\sqrt{\frac{g}{4a}(s_0^2 - s^2)}$$

(b) L'équation ci-dessus étant à variables séparables, on a [1]

$$dt = -\sqrt{\frac{4a}{g}}\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = -\sqrt{\frac{4a}{g}}\frac{1}{s_0}\frac{ds}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2}}$$

Le temps T nécessaire pour passer de $s = s_0$ à $s = 0$ s'obtient en intégrant entre l'instant initial $t = 0$ où $s = s_0$ et l'instant T où $s = 0$. On a donc

$$\int_0^T dt = -\sqrt{\frac{4a}{g}}\frac{1}{s_0}\int_{s_0}^{0} \frac{ds}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2}}$$

soit

$$T = -\sqrt{\frac{4a}{g}}\frac{s_0}{s_0}\left[\arcsin\frac{s}{s_0}\right]_{s_0}^{0} = \sqrt{\frac{4a}{g}}\arcsin 1 = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

T est donc bien indépendant de s_0, ce qui démontre que la cycloïde est isochrone.

Question IV

1. On notera que la solution singulière $s(t) = s_0$ doit être écartée puisqu'elle ne décrit pas le passage de $s = s_0$ à $s = 0$.

i. (a) On dit que la suite $\{x_k\}$ converge vers $a \in \mathbb{C}$ lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \geq N) : |x_k - a| \leq \varepsilon$$

(b) La condition

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \geq N) : |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \qquad (\dagger)$$

est nécessaire. En effet, si la suite $\{x_k\}$ converge vers a alors, par définition de la convergence, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \geq N) : |x_k - a| \leq \varepsilon/2$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que $\forall k \geq N$,

$$|x_{k+1} - x_k| = |(x_{k+1} - a) + (a - x_k)| \leq |x_{k+1} - a| + |a - x_k| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

Toute suite convergente vérifie donc la condition proposée.

La condition (†) ne garantit cependant pas la convergence de la suite. Par exemple, si on considère la suite des sommes partielles de la série harmonique, *i.e.* la suite $\{x_k\}$ avec

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

La différence entre deux termes successifs est donnée par

$$x_{k+1} - x_k = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \frac{1}{k+1}$$

Celle-ci peut donc être rendue arbitrairement petite, ce qui correspond à la proposition (†). Par contre, la suite $\{x_k\}$ diverge puisque la série harmonique est divergente. La condition proposée n'est donc pas suffisante pour garantir la convergence.

ii. Par application du critère de Weierstrass, on peut établir la convergence uniforme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin kx$ sur $\mathbb{R}$. On a en effet, $\forall k \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|a_k \sin kx| \leq |a_k|$$

où a_k est le terme général d'une série numérique qui converge absolument.

Les hypothèses du théorème sur la continuité des fonctions définies par une série sont donc remplies sur $\mathbb{R}$ puisque la série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions $a_k \sin kx$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

iii. La fonction $f(x) = 1/x^{\alpha}$ est réelle et continue sur l'intervalle $]0,a]$ où $a \in \mathbb{R}_0^+$ et y admet une primitive

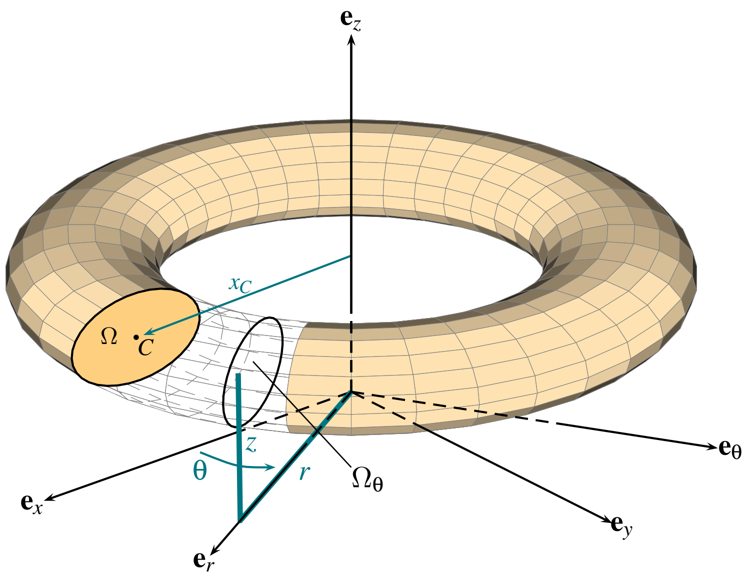
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

- Cette primitive possède une limite infinie pour x tendant vers 0 dans le cas où $\alpha \geq 1$. Dès lors, f n'est pas intégrable sur $]0,a]$ pour ces valeurs de α.
- Si $\alpha < 1$, la limite de la primitive pour x tendant vers 0 est finie. La fonction f étant de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité est assurée.

Quel que soit $a > 0$, on a donc

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \begin{cases} \in \mathbb{L}_1(]0,a[) & \text{si } \alpha < 1 \\ \notin \mathbb{L}_1(]0,a[) & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

iv.



Puisque ρ est constante, la masse de l'élément matériel vaut $m = \rho S$. On a donc

$$Sx_C = \iint_\Omega x\,dx dz$$

Par ailleurs, le volume de révolution engendré par la rotation de l'élément matériel Ω autour de l'axe OZ peut être aisément calculé en coordonnées cylindriques d'axe OZ. On a

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\Omega(\theta)} r\,drdz = 2\pi \iint_\Omega x\,dxdz$$

où on a introduit le Jacobien r du changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques et où

$$\iint_{\Omega(\theta)} r\,drdz = \iint_\Omega x\,dxdz$$

puisque l'élément matériel est identique quelle que soit la valeur de l'angle θ.
Finalement, on obtient bien

$$x_C = \frac{V}{2\pi S}$$