Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2024

MATH0502 - Analyse Mathématique 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Définissez mathématiquement le concept de convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle $\mathtt{I}$ et introduisez la notation correspondante.

ii. Dans le cas où $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{k+1}|/|a_k| = a \in \mathbb{R}_0^+$, démontrez que la série obtenue à partir de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en remplaçant chaque terme par sa dérivée possède le même intervalle de convergence que la série de départ.

iii. Si f est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$, peut-on en déduire que la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} f(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathtt{I}$? Justifiez.

iv. Appliquez les critères d'intégrabilité et de non-intégrabilité basés sur le comportement d'une primitive de l'intégrande à la fonction $1/x^\alpha$ afin d'étudier l'intégrabilité de celle-ci au voisinage de $+\infty$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Question II

Étudiez la convergence des séries numériques suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

i.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} k}{k!}$$

ii.
$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k \ln k}{1+k^2}$$

iii.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\left(-1+\frac{2i\pi}{3}\right)k}}{k}$$

iv.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^\beta}{1+k}$$

Question III

Calculez en justifiant
$$\int_0^1 y\, dy \int_{y^2}^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

Tournez la page.

Question IV

On considère la surface Σ obtenue par la rotation autour de l'axe OZ du graphique de la fonction

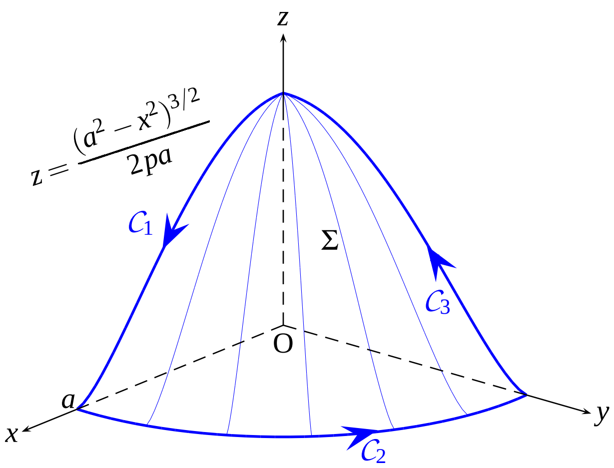
$$z = \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{2pa}, \qquad x \in [0, a]$$

limitée au premier octant $(x, y, z \geq 0)$.

On considère également le champ vectoriel

$$\mathbf{F} = \beta \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y}{3a^2 + x^2 + y^2}$$

où $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes OX et OY. Les constantes a, β et p sont réelles et strictement positives.



i. Déterminez la mesure du volume situé dans le premier octant, limité supérieurement par la surface Σ et inférieurement par le plan $z = 0$.

ii. Calculez $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ désigne la frontière de Σ (voir dessin) en détaillant les contributions des trois courbes régulières composant $\mathcal{C}$.

iii. Justifiez le résultat de ii. par les théorèmes de l'analyse vectorielle.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La suite des fonctions f_k converge uniformément vers la fonction f sur un intervalle $\mathtt{I}$, ce qui se note $f_k \stackrel{\mathtt{I}}{\Longrightarrow} f$, si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall k \geq N) : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ii. D'une part, en appliquant le critère du quotient à la série des modules $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$, on établit que l'intervalle de convergence $\mathtt{I}$ de cette série est décrit par

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = a|x| < 1$$

soit $\mathtt{I} =]-1/a, 1/a[$.

D'autre part, la série obtenue par dérivation terme à terme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Il s'agit encore d'une série de puissances dont l'intervalle de convergence $\mathtt{I}'$ est obtenu par application du même critère du quotient, soit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}(k+1)x^k|}{|a_k k x^{k-1}|} = |x| \lim_{k\to\infty} \left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \, \frac{k+1}{k}\right) = a|x| < 1$$

de sorte que $\mathtt{I}' =]-1/a, 1/a[$.
L'intervalle de convergence de la série des dérivées est donc identique à celui de la série de départ.

iii. Puisque $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(x)| = \left|\mathrm{e}^{-x^2} f(x)\right| \leq |f(x)|$$

Or $|f| \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I}) \Leftrightarrow f \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I})$ de sorte que

$$|g(x)| \leq |f(x)| \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I}), \quad \forall x \in \mathtt{I}$$

Par le critère de Lebesgue, la fonction g étant mesurable (comme produit de deux fonctions mesurables) et majorée en module par une fonction intégrable sur $\mathtt{I}$, on en déduit que $g \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I})$.

iv. La fonction f est réelle et continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et y admet une primitive

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

- Cette primitive possède une limite infinie pour x tendant vers $+\infty$ dans le cas où $\alpha \leq 1$. Dès lors, f n'est pas intégrable sur $]a, +\infty[$ pour ces valeurs de α.
- Si $\alpha > 1$, la limite de la primitive pour x tendant vers $+\infty$ est finie. La fonction f étant de signe constant au voisinage de $+\infty$, l'intégrabilité est assurée.

Quel que soit $a \in]0, +\infty[$, on a donc

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \begin{cases} \in \mathbb{L}_1(]a, +\infty[) & \text{si } \alpha > 1 \\ \notin \mathbb{L}_1(]a, +\infty[) & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Question II

i. Soit
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} k}{k!}$$
Appliquons le critère du quotient à cette série à termes positifs.
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \frac{\operatorname{th}(k+1)}{\operatorname{th} k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$
La série est donc convergente.

ii. Soit
$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k \ln k}{1+k^2}$$
Le terme général de cette série à termes positifs est tel que
$$\frac{k\ln k}{1+k^2} \sim \frac{\ln k}{k}, \quad (k \to +\infty)$$
On a donc
$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{k\ln k}{1+k^2}\right), \quad (k \to +\infty)$$
de sorte que la série diverge.

iii. Soit
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\left(-1+\frac{2i\pi}{3}\right)k}}{k}$$
Il ne s'agit pas d'une série à termes positifs puisque son terme général est complexe. Le module du terme général de cette série est tel que
$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\left(-1+\frac{2i\pi}{3}\right)k}}{k}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-k}}{k}\left|\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}k}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-k}}{k} = o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (k \to +\infty)$$
puisque
$$\mathrm{e}^{-k} = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad (k \to +\infty)$$
La série est donc absolument convergente.

iv. Soit
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^\beta}{1+k}$$
On a
$$\lim_{k\to+\infty} (-1)^k \frac{k^\beta}{1+k} \neq 0 \quad \text{si} \quad \beta \geq 1$$
de sorte que la série diverge pour $\beta \geq 1$.

Le module du terme général de cette série est tel que
$$\frac{k^\beta}{1+k} \sim \frac{1}{k^{1-\beta}}, \quad (k \to +\infty)$$
de sorte que la série est absolument convergente si $\beta < 0$ et diverge en module si $\beta \geq 0$.

Pour $0 \leq \beta < 1$, la série est alternée puisque
$$u_k = (-1)^k v_k \quad \text{avec} \quad v_k = \frac{k^\beta}{1+k} > 0, \ \forall \beta \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Cette série alternée est semi-convergente puisque

$$v_k = \frac{k^\beta}{1+k}$$

tend monotonément vers 0 pour $k \geq 0$. On a en effet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dk}\left(\frac{k^\beta}{1+k}\right) &= \frac{\beta k^{\beta-1}(1+k)-k^\beta}{(1+k)^2} = \frac{k^{\beta-1}}{(1+k)^2}\Big(\beta(1+k)-k\Big)\\ &= \frac{k^{\beta-1}}{(1+k)^2}\Big((\beta-1)k+\beta\Big) < 0 \text{ si } \beta<1, \forall k \geq \frac{\beta}{1-\beta}\end{aligned}$$

En conclusion,

- la série converge absolument si $\beta < 0$;
- la série est semi-convergente si $0 \leq \beta < 1$;
- la série diverge si $\beta \geq 1$.

Question III

L'expression

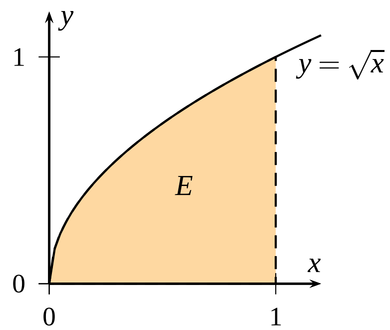
$$\int_0^1 y\,dy \int_{y^2}^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

ne peut être calculée telle quelle puisqu'on ne connait pas de primitive de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Elle est cependant égale à l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathtt{E}} y\,\frac{\sin x}{x}\,dxdy \quad \text{où (voir figure)} \quad \mathtt{E} = \Big\{(x,y) : 0<y<1,\ y^2<x<1\Big\}$$

si celle-ci existe et elle pourra dans ce cas être calculée dans l'autre ordre d'intégration partielle (FUBINI).



La fonction $(y \sin x)/x$ n'est pas continue sur $\bar{E}$, l'adhérence de E, puisqu'elle n'est pas définie au point $(0,0)$. L'intégrabilité pourra cependant être justifiée, en vertu du critère de Tonelli, si on trouve un ordre d'intégration partielle de $|(y \sin x)/x| = (y \sin x)/x$ qui existe.

En inversant l'ordre d'intégration proposé dans l'énoncé pour ce calcul, on est conduit à évaluer

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y \frac{\sin x}{x}\,dy \qquad (\spadesuit)$$

L'intégrale

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{x}} y\, \frac{\sin x}{x}\, dy$$

est définie puisque l'intégrande $(y \sin x)/x$ est une fonction continue de la variable y sur le compact $[0, \sqrt{x}]$ pour presque tout $x \in [0,1]$. Sa valeur est donnée par

$$I_1 = \frac{\sin x}{x} \left. \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{2}$$

En injectant cette valeur dans l'expression (♠), on est amené à considérer

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x\, dx$$

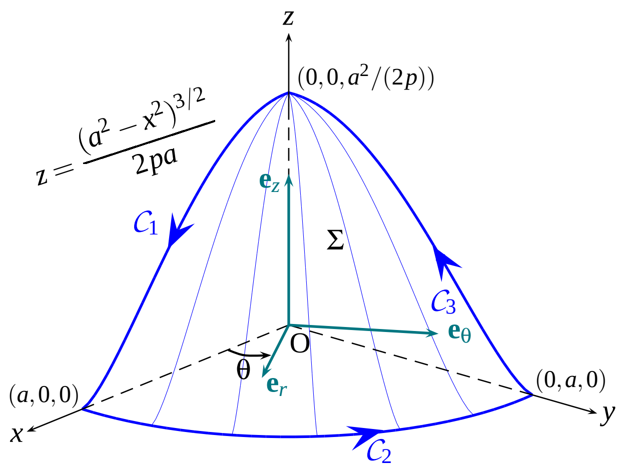
L'intégrale I_2 est également définie en vertu de la continuité de l'intégrande $\sin x$ sur le compact $[0,1]$. Sa valeur est donnée par

$$I_2 = \frac{1}{2} \Big[-\cos x \Big]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

Dès lors

$$I = I_2 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

Question IV



i. Compte tenu de sa géométrie, le domaine, noté $\mathtt{E}$, est aisément décrit en coordonnées cylindriques. On a, en tenant compte du Jacobien $J = r$ de la transformation,

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r\, dr \int_0^{z(r)} dz \quad \text{où} \quad z(r) = \frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{2pa} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^a r \frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{2pa} dr \\
&= \frac{\pi}{4pa} \left[\frac{-(a^2 - r^2)^{5/2}}{5} \right]_0^a \\
&= \frac{\pi a^4}{20p}
\end{aligned}$$

De façon alternative, le volume peut être considéré comme un empilement de quarts de disques élémentaires $\Sigma(z)$ dont le rayon

$$r(z) = \sqrt{a^2 - (2paz)^{2/3}}$$

varie avec la coordonnée verticale $z \in [0, a^2/(2p)]$. Selon cette approche, on a donc

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{a^2/(2p)} dz \iint_{\Sigma(z)} dxdy = \int_0^{a^2/(2p)} \left(\frac{1}{4}\pi r^2(z)\right) dz \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^{a^2/(2p)} \left[a^2 - (2paz)^{2/3}\right] dz \\
&= \frac{\pi}{4} \left[a^2 z - \frac{3}{5}(2pa)^{2/3} z^{5/3}\right]_0^{a^2/(2p)} \\
&= \frac{\pi a^4}{20p}
\end{aligned}$$

ii. (a) L'arc $\mathcal{C}_1$ est décrit par

$$\mathbf{s}(x) = x\mathbf{e}_x + \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{2pa}\mathbf{e}_z, \qquad x \in [0, a]$$

On a donc

$$\mathbf{s}'(x) = \mathbf{e}_x - \frac{3x\sqrt{a^2 - x^2}}{2pa}\mathbf{e}_z$$

et, puisque $y = 0$ sur $\mathcal{C}_1$,

$$\mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] = \beta \frac{x\mathbf{e}_x}{3a^2 + x^2}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^a \mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] \cdot \mathbf{s}'(x) dx \\
&= \beta \int_0^a \frac{x}{3a^2 + x^2} dx \\
&= \beta \left[\frac{1}{2}\ln(3a^2 + x^2)\right]_0^a = \frac{1}{2}\beta\left[\ln(4a^2) - \ln(3a^2)\right] = \frac{1}{2}\beta \ln\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(b) En adoptant des coordonnées polaires dans le plan $z = 0$, l'arc $\mathcal{C}_2$ est décrit par

$$\mathbf{s}(\theta) = a\mathbf{e}_r(\theta), \qquad \theta \in [0, \pi/2]$$

Dès lors, il vient

$$\mathbf{s}'(\theta) = a\mathbf{e}_\theta$$

et, puisque $x = a\cos\theta$ et $y = a\sin\theta$ sur $\mathcal{C}_2$,

$$\mathbf{F}[\mathbf{s}(\theta)] = \beta \frac{a\mathbf{e}_r}{3a^2 + a^2} = \frac{\beta}{4a}\mathbf{e}_r$$

On observe donc que

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}[\mathbf{s}(\theta)] \cdot \mathbf{s}'(\theta) d\theta = 0$$

(c) L'intégrale curviligne sur $\mathcal{C}_3$ se calcule de façon semblable à celle sur $\mathcal{C}_1$ mais en étant attentif à l'orientation de la courbe. $\mathcal{C}_3$ est décrite par

$$\mathbf{s}(y) = y\mathbf{e}_y + \frac{(a^2 - y^2)^{3/2}}{2pa}\mathbf{e}_z$$

où y varie de a à 0. On calcule

$$\mathbf{s}'(y) = \mathbf{e}_y - \frac{3y\sqrt{a^2 - y^2}}{2ap}\mathbf{e}_z$$

ainsi que, puisque $x = 0$ sur $\mathcal{C}_3$,

$$\mathbf{F}[\mathbf{s}(y)] = \beta \frac{y\mathbf{e}_y}{3a^2 + y^2}$$

Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_a^0 \mathbf{F}[\mathbf{s}(y)]\cdot\mathbf{s}'(y)dy \\
&= -\int_0^a \mathbf{F}[\mathbf{s}(y)]\cdot\mathbf{s}'(y)dy \\
&= -\beta\int_0^a \frac{y}{3a^2+y^2}dx = -\frac{1}{2}\beta\ln\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on trouve

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \\
&= \frac{1}{2}\beta\ln\frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2}\beta\ln\frac{4}{3} = 0
\end{aligned}$$

iii. Par application de la formule de Stokes, l'intégrale curviligne peut être exprimée sous la forme

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla\wedge\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

Or, en tout point de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\nabla\wedge\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\beta x}{3a^2+x^2+y^2} & \dfrac{\beta y}{3a^2+x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta y}{3a^2+x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta x}{3a^2+x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{e}_z$$

$$= \left[\frac{-2\beta xy}{(3a^2+x^2+y^2)^2} - \frac{-2\beta xy}{(3a^2+x^2+y^2)^2}\right]\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

Dès lors, il vient

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla\wedge\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$$

De façon alternative, on peut remarquer que $\mathbf{F}$ est irrotationnel sur un ouvert simplement connexe contenant Σ de sorte qu'il dérive d'un potentiel scalaire V. Par le théorème fondamental des intégrales curvilignes, on en déduit que la circulation sur une courbe fermée est égale à 0 puisque cette intégrale est la différence entre les valeurs prises par V aux extrémités de $\mathcal{C}$ et que ces extrémités sont confondues.