Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2026

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. La convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ entraîne-t-elle la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$? Justifiez.

ii. On considère la suite $\{f_n\}$ des fonctions continues sur $[\alpha,\beta]$ et la suite numérique convergente $\{a_n\}$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} [a_n f_n(x)]$ définit une fonction continue sur $[\alpha,\beta]$ si $f_n \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} f$.

iii. Si $f \in C_0(]0,1/2])$ et $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0, peut-on en conclure que $f \in \mathbb{L}_1(]0,1/2[)$? Justifiez.

iv. On considère la suite des fonctions $f_n(x) = \min\left\{\sqrt{nx}, \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$. Par application du théorème de Lebesgue, montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

et déterminez la valeur de cette expression.

Question II

On considère la fonction définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+3}}{(4k+3)(2k+1)!}$$

i. Déterminez le domaine de définition de S.
ii. Calculez $S(1)$ avec une erreur maximale de 10^{-3}.
iii. Calculez $S'(x)$. Pour quelles valeurs de x cette expression est-elle valable ?
iv. Exprimez $S'(x)$ en termes de fonctions usuelles et déduisez-en une expression intégrale de $S(x)$.

Tournez la page.

Question III

Étudiez l'existence des intégrales suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

i. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta}(1+x)}\,dx$

iv. $\displaystyle\iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$

Question IV

On considère la demi-sphère

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$$

et le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \beta\frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}}{\ell}$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position, $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe OZ et β et ℓ sont des constantes strictement positives.

i. Calculez $\nabla \wedge \mathbf{F}$.

ii. Évaluez, en travaillant en coordonnées cylindriques,

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire à Σ telle que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0$.

iii. Énoncez (de façon générale) le théorème de Stokes.

iv. En exploitant le théorème de Stokes, vérifiez le calcul de I effectué au point ii. en évaluant une intégrale curviligne.

Question I

i. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, alors son terme général tend vers zéro. Dès lors, il existe un entier N tel que $|a_k| < 1$ pour tout $k \geq N$. Pour de telles valeurs de $k \geq N$, on a

$$a_k^2 \leq |a_k|$$

Le terme général de la série des a_k^2 est donc majoré par le terme général d'une série numérique convergente puisque la série des a_k est absolument convergente.
Par le critère de comparaison, on en déduit la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

ii. Puisque les fonctions f_n sont continues sur $[\alpha, \beta]$ et que la suite de ces fonctions converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C_0([\alpha, \beta])$$

Par ailleurs, la suite $\{a_n\}$ étant convergente, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

En rassemblant ces deux résultats et en considérant le fait que la limite d'un produit est égale au produit des limites si chacune des limites existe, il vient, pour tout x fixé dans $[\alpha, \beta]$,

$$\lim_{n\to+\infty} [a_n f_n(x)] = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = a f(x)$$

Puisque $f \in C_0([\alpha, \beta])$, le produit (af) est lui-même continu sur $[\alpha, \beta]$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

iii. Non, on ne peut pas conclure cela.
Considérons, par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Cette fonction est continue sur $]0, 1/2]$ et vérifie aussi

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to 0^+)$$

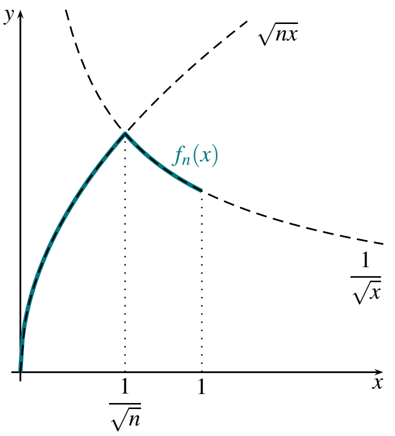
Cependant, elle n'est pas intégrable au voisinage de 0 puisque $F(x) = \ln|\ln x|$, primitive de $f(x)$ sur $]0, 1/2[$, est telle que

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln|\ln x| = +\infty$$

iv. Soit la suite des fonctions

$$f_n(x) = \min\left\{\sqrt{nx}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$$

dont le graphique est esquissé ci-contre pour $n > 1$.



Cette suite de fonctions vérifie les hypothèses du théorème de Lebesgue pour l'intégration sur $]0,1[$.

- $f_n \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ puisque f_n est continue sur le compact $[0,1]$.
- La suite des f_n converge vers la fonction $f = 1/\sqrt{x}$ presque partout sur $]0,1[$. En effet, les fonctions f_n s'annulent en $x=0$ et coïncident avec la fonction $1/\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 1/\sqrt{n}$. Puisque $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

- $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ presque partout sur $]0,1[$ avec $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$.

Ceci justifie le passage de la limite sous le signe d'intégration, *i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \; dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

Question II

i. La fonction est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique correspondante converge. Comme les termes de la série sont de signe varable, appliquons le critère du quotient à la série des modules :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= |x|^4 \lim_{k\to+\infty} \frac{(4k+3)}{(4k+7)} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} \\ &= |x|^4 \lim_{k\to+\infty} \frac{(4k+3)}{(4k+7)(2k+3)(2k+2)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La limite étant strictement inférieure à 1, la série converge (absolument) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la fonction S est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. On considère

$$S(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!}$$

La série étant alternée et le module de son terme général décroissant monotonément vers 0, l'erreur commise en tronquant la série est, en module, inférieure au module du premier terme négligé. On a donc

$$S(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon| \leq \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!}$$

Si $n=1$, on obtient

$$|\varepsilon| \leq \frac{1}{7(3!)} = \frac{1}{42} > 10^{-3}$$

Si $n=2$, on obtient

$$|\varepsilon| \leq \frac{1}{11(5!)} = \frac{1}{11 \times 120} < 10^{-3}$$

On peut donc approcher $S(1)$ avec une erreur inférieure à 10^{-3} par

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!} = \frac{1}{3 \cdot 1!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} = \frac{13}{42}$$

iii. Une série de puissances est indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence, ici $\mathbb{R}$, et y est dérivable terme à terme. Dès lors, il vient

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

iv. Par comparaison avec le développement de la fonction sinus, *i.e.*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

on a

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dès lors,

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt + C$$

De $S(0) = 0$, on déduit que la constante C est nulle. Dès lors,

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Question III

i. Soit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$$

On a

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \in C_0([1, +\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln x = o\left(\sqrt{x}\right)$ de sorte que

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et donc l'existence de l'intégrale.

ii. Soit

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos x}\, dx$$

On a

$$\frac{1}{1+\cos x} \in C_0([0, \pi[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de π. Dans ce voisinage, la formule de Taylor donne

$$\cos x = \cos\pi + (x-\pi)(-\sin\pi) + \frac{(x-\pi)^2}{2}(-\cos\pi) + o[(x-\pi)^2]$$

soit

$$\cos x \sim -1 + \frac{(\pi - x)^2}{2}, \quad (x \to \pi)$$

On a donc

$$\frac{1}{1+\cos x} \sim \frac{2}{(\pi - x)^2}, \quad (x \to \pi)$$

de sorte que la fonction n'est pas intégrable au voisinage de π et que l'intégrale n'existe pas.

iii. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\beta(1+x)}\, dx$$

On a

$$\frac{1}{x^\beta(1+x)} \in C_0(]0,+\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{1}{x^\beta(1+x)} \sim \frac{1}{x^{\beta+1}}$$

de sorte que la fonction n'est intégrable que si $\beta > 0$.

Au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{x^\beta(1+x)} \sim \frac{1}{x^\beta}$$

de sorte que la fonction n'est intégrable que si $\beta < 1$.

En conclusion, l'intégrale existe si et seulement si $\beta \in]0,1[$.

iv. Soit

$$\iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} \frac{1}{(x+y)^2}\, dx dy$$

Le domaine étant non borné, il convient de faire appel au critère de Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale. Il faut donc justifier l'existence d'un ordre d'intégration partielle de

$$|f(x,y)| = f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$$

On considère la succession d'intégrales partielles

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^2}\, dx$$

L'intégrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^2}\, dx$$

existe. En effet, d'une part, la fonction $1/(x+y)^2$ est continue par rapport à x sur $[0,+\infty[$ pour presque tout $y \in]0,+\infty[$. D'autre part, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(x+y)^2} \sim \frac{1}{x^2}$$

de sorte que l'intégrabilité par rapport à x est assurée dans ce voisinage également.
La valeur de I_1 est donnée par

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x+y}\right]_0^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+y}\right) + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

On est ensuite amené à considérer

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}\, dy$$

Cette intégrale n'existe pas puisque la fonction $1/y$ n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.

Le critère de Tonelli, qui n'est qu'une condition suffisante d'intégrabilité, ne permet cependant pas de conclure directement à la non-existence de l'intégrale double donnée.
Par contre, si l'intégrale double de $f(x,y)$ existait, Fubini nous apprend que son calcul pourrait être mené dans n'importe quel ordre d'intégration partielle et donc, en particulier, dans l'ordre choisi. Comme l'intégrale n'existe pas dans cet ordre, nous pouvons conclure que l'intégrale proposée n'existe pas.

Question IV

i. Soit $\mathbf{s} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, le vecteur position en coordonnées cartésiennes. On a

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \beta \frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}}{\ell} = \beta \frac{\mathbf{e}_z \wedge (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)}{\ell} = \frac{\beta}{\ell}(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x)$$

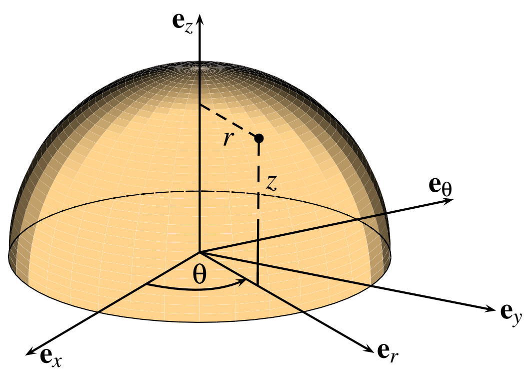
En procédant formellement pour le calcul du déterminant, on obtient alors

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{\beta}{\ell} y & \dfrac{\beta}{\ell} x & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\beta}{\ell}\mathbf{e}_z$$

ii. Soit

$$I = \iint_\Sigma (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$ est la demi-sphère de rayon R centrée à l'origine des axes représentée ci-dessous.



En adoptant une paramétrisation en coordonnées cylindriques pour décrire Σ, on a

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\,\mathbf{e}_r(\theta) + z(r)\,\mathbf{e}_z$$

La relation $z(r)$ est déterminée en exprimant que les points de Σ appartiennent à la demi-sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{soit} \quad r^2 + z^2 = R^2$$

On a donc $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ puisque la racine positive doit être choisie pour représenter la demi-sphère correspondant à $z \geq 0$.
La paramétrisation de la demi-sphère Σ s'écrit alors

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\,\mathbf{e}_r(\theta) + \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathbf{e}_z, \quad \theta \in]0, 2\pi[\text{ et } r \in]0, R[$$

On calcule successivement

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{e}_r + \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\,\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r\,\mathbf{e}_\theta$$

de sorte que

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \left(\mathbf{e}_r + \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\mathbf{e}_z\right) \wedge r\,\mathbf{e}_\theta = r\,\mathbf{e}_z + \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\mathbf{e}_r$$

Remarquons que la normale $\mathbf{n}$ portée par ce vecteur est bien orientée selon $\mathbf{e}_z$.
L'intégrale à calculer s'écrit alors

$$\begin{aligned}
I = \iint_\Sigma (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta}\right) dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{2\beta}{\ell}\mathbf{e}_z \cdot \left(r\mathbf{e}_z + \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\mathbf{e}_r\right) dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{2\beta}{\ell} r\, dr = 2\pi \frac{\beta}{\ell} R^2
\end{aligned}$$

iii. Le théorème de Stokes s'écrit, pour tout champ vectoriel $\mathbf{F}$ continûment dérivable sur un ouvert contenant la surface Σ régulière par morceaux,

$$\iint_\Sigma (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

où $\partial\Sigma$ désigne la courbe qui sous-tend la surface Σ et qui est orientée dans le sens compatible avec la règle de la main droite appliquée à la normale $\mathbf{n}$.

iv. L'application du théorème de Stokes au problème étudié demande de considérer, comme courbe $\partial\Sigma$ sous-tendant la demi-sphère Σ, le cercle de rayon R centré à l'origine des axes situé dans le plan $z = 0$.
Ce cercle peut être décrit en coordonnées polaires, de façon compatible avec l'orientation de $\mathbf{n}$, par

$$\mathbf{s}(\theta) = R\mathbf{e}_r(\theta), \quad \theta \in]0, 2\pi[$$

On a donc $\mathbf{s}'(\theta) = R\mathbf{e}_\theta$ et l'intégrale à calculer s'écrit

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\beta \frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}}{\ell}\right) \cdot R\mathbf{e}_\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\beta \frac{\mathbf{e}_z \wedge R\mathbf{e}_r}{\ell}\right) \cdot R\mathbf{e}_\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} R^2 \frac{\beta}{\ell} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{\beta}{\ell} d\theta \\
&= 2\pi \frac{\beta}{\ell} R^2
\end{aligned}$$

ce qui permet de confirmer le résultat obtenu en ii.