Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2025

MATH0502 - Analyse Mathématique 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. À toute suite numérique complexe $\{a_k\}$, on peut associer
   - sa dérivée discrète $\{b_k\}$ définie par $b_k = a_{k+1} - a_k$;
   - ses primitives discrètes $\{c_k\}$ définies par $c_k = \sum_{n=1}^{k} a_n + C$ où $C \in \mathbb{C}$ désigne une constante arbitraire.

   La convergence de la suite $\{a_k\}$ implique-t-elle la convergence de sa dérivée discrète et de ses primitives discrètes ? Justifiez.

ii. (a) On considère une suite de fonctions $\{f_n\}$. Traduisez en français la notation $f_n \overset{\mathtt{I}}{\Rightarrow} f$ et définissez mathématiquement le concept correspondant.

   (b) La suite des fonctions $\{f_n\}$ où

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\left[(n+1)\frac{x^2}{1+x^2} + \sin(nx)\right]$$

   converge-t-elle ? Si oui, sur quel ensemble $\mathtt{I}$? Peut-on écrire $f_n \overset{\mathtt{I}}{\Rightarrow} f$? Justifiez.

iii. On note $\mathbb{L}_2$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable, *i.e.* l'ensemble des fonctions f telles que $f^2 \in \mathbb{L}_1$. Une relation d'inclusion du type $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ ou $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_1$ existe-t-elle entre ces deux ensembles ? Justifiez.

iv. Si $f \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ et $g \in C_0([0,1])$, montrez que $fg \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$.

Question II

On souhaite évaluer de façon approchée

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(x^2)\, dx$$

i. Les résultats classiques relatifs aux séries géométriques permettent d'établir que

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k\,,\ \forall q \text{ tel que } |q| < 1$$

   En exploitant ce résultat, déterminez une expression en série de puissances de $\operatorname{arctg} y$. Pour quelles valeurs de y cette expression est-elle valable ? Justifiez.

ii. Exprimez I sous la forme d'une série numérique.

iii. Sur base du résultat du point ii, déterminez une valeur approchée de I avec une erreur maximale de 10^{-3}.

Tournez la page.

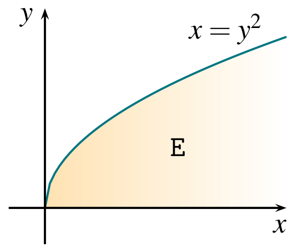
Question III

Étudiez l'existence des intégrales suivantes en discutant éventuellement en fonction du paramètre $n \in \mathbb{Z}$.

i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln^2 x}{x^3+1}\, dx$

ii. $\displaystyle\iint_{\mathtt{E}} \frac{1}{(xy)^n}\, dx\, dy$

où $\mathtt{E}$ est le domaine situé dans le premier quadrant entre l'axe OX et la parabole d'axe OX et d'équation $x = y^2$ (voir figure ci-contre).



Question IV

On considère le cône d'équation

$$x^2 + y^2 = (a - z)^2, \quad 0 \le z \le a$$

et le champ vectoriel

$$\mathbf{F} = \beta\, \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{a}$$

i. Représentez le cône.

ii. Calculez le volume intérieur du cône en utilisant le calcul intégral.

iii. Calculez

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où Σ est la surface latérale du cône de normale $\mathbf{n}$ telle que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \ge 0$.

iv. Vérifiez le calcul réalisé au point iii. en utilisant le théorème de Gauss.

Question I

i. La convergence de la suite $\{a_k\}$ se traduit par

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = a \in \mathbb{C}$$

On a donc

$$\lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{k\to+\infty} a_{k+1} - \lim_{k\to+\infty} a_k = a - a = 0 \in \mathbb{C}$$

de sorte que la dérivée discrète converge également.

Par contre, les primitives discrètes ne convergent pas forcément. Considérons par exemple la suite $\{a_k\} = \{1/k\}$. Cette suite converge puisque

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0 \in \mathbb{C}$$

mais la suite des sommes partielles

$$\{S_k\} \qquad \text{où} \qquad S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

correspond à la série harmonique qui est divergente. Les primitives discrètes de cette suite ne convergent donc pas de sorte que la convergence d'une suite n'implique pas la convergence de ses primitives discrètes.

ii. (a) La notation $f_n \overset{\mathtt{I}}{\rightrightarrows} f$ indique que la suite des fonctions f_n converge uniformément vers f sur $\mathtt{I}$, ce qui est défini mathématiquement par

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall n \geq N) : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(b) On calcule aisément

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[(n+1)\frac{x^2}{1+x^2} + \sin(nx)\right] = \frac{x^2}{1+x^2}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Pour établir la convergence uniforme, on observe que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f_n(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right| = \frac{1}{n}\left| \frac{x^2}{1+x^2} + \sin(nx) \right| \leq \frac{2}{n}$$

Dès lors, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ puisque la différence entre f_n et sa limite f peut être rendue arbitrairement petite, simultanément pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de considérer N égal à l'entier immédiatement supérieur à $2/\varepsilon$ pour que la condition énoncée en (a) soit rencontrée.

iii. La relation $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ signifie que toute fonction intégrable est également de carré intégrable. Ceci est faux puisque, par exemple, la fonction $x^{-1/2}\delta_{]0,1[}(x)$ est intégrable alors que la fonction $x^{-1}\delta_{]0,1[}(x) = [x^{-1/2}\delta_{]0,1[}(x)]^2$ ne l'est pas.

La relation $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_1$ signifie que toute fonction de carré intégrable est également intégrable. Ceci est également faux puisque, par exemple, la fonction $x^{-2}\delta_{]1,+\infty[}(x)$ est intégrable alors que la fonction $x^{-1}\delta_{]1,+\infty[}(x)$, dont le carré est $x^{-2}\delta_{]1,+\infty[}(x)$, ne l'est pas.

iv. La fonction g étant continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée sur ce compact, *i.e.*

$$\exists C \geq 0 : |g(x)| \leq C \qquad \forall x \in [0,1]$$

Dès lors, on a

$$|f(x)g(x)| \leq C|f(x)| \qquad \forall x \in]0,1[$$

La fonction f étant intégrable sur $]0,1[$, il en est de même de la fonction $|f|$. Par le critère de Lebesgue, on en déduit que $fg \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ puisque ce produit est majoré en module par une fonction intégrable.

Question II

i. De

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arctg} y = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{arctg} 0 = 0$$

on déduit que $\operatorname{arctg} y$ est la primitive de $1/(1+y^2)$ qui s'annule en $y=0$, ce qui peut s'écrire

$$\operatorname{arctg} y = \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Partant de l'expression de la somme de la série géométrique

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad |q| < 1$$

on obtient, en posant $q = -t^2$,

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$$

Cette série de puissances converge pour toutes les valeurs de t telles que $-t^2 \in]-1,\,1[$, c'est-à-dire pour tout $t \in]-1,\,1[$.
Toute série de puissances peut être primitivée terme à terme sur son intervalle de convergence et la série obtenue possède le même intervalle de convergence que la série de départ. Pour tout $y \in]-1,1[$, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} y &= \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^y t^{2k}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1} \qquad (\diamond)
\end{aligned}$$

En $y=1$ et en $y=-1$, la série de puissance apparaissant dans le membre de droite se réduit en les séries numériques

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)}{2k+1}$$

Celles-ci convergent en tant que séries alternées dont le terme général décroît monotonément vers zéro. Dès lors, la représentation en série de puissances de la fonction arctg se prolonge par continuité sur $[-1,1]$ puisque toute série de puissances est continue en les extrémités de son intervalle de convergence où elle converge.

ii. Utilisant le résultat du point i. pour établir le développement en série de puissances de $\operatorname{arctg} x^2$, on obtient

$$\operatorname{arctg}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^2)^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{2k+1}$$

dont l'intervalle de convergence est $]-1,1[$ (et qui converge sur $[-1,1]$).

Toute série de puissances pouvant être intégrée terme à terme sur son intervalle de convergence, on obtient, puisque $[0,1/2] \subset]-1,1[$,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(x^2)\, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{2k+1}\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(4k+3)} \left[x^{4k+3}\right]_0^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{4k+3}(2k+1)(4k+3)} \end{aligned}$$

iii. La valeur de I est obtenue sous la forme d'une série numérique alternée convergente dont le module du terme général décroit monotonément vers 0. L'erreur commise en approchant cette série par une de ses sommes partielles est donc majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé, soit

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^{4k+3}(2k+1)(4k+3)} + \varepsilon \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| \leq \frac{1}{2^{4n+3}(2n+1)(4n+3)}$$

Recherchons la plus petite valeur de n pour laquelle

$$\frac{1}{2^{4n+3}(2n+1)(4n+3)} < 10^{-3}$$

Si $n = 1$, on a

$$\frac{1}{2^{4n+3}(2n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2^7 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{128 \cdot 21} < 10^{-3}$$

On peut donc approcher I avec une erreur inférieure à 10^{-3} par

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{2^{4k+3}(2k+1)(4k+3)} = \frac{1}{24}$$

Question III

i. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln^2 x}{x^3+1}\, dx$$

On a

$$\frac{x \ln^2 x}{x^3+1} \in C_0(]0,+\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend de l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{x \ln^2 x}{x^3+1} \sim \frac{\ln^2 x}{x^2}$$

de sorte que, puisqu'on a aussi $\ln^2 x = o(\sqrt{x})$, $(x \to +\infty)$,

$$\frac{x \ln^2 x}{x^3+1} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right), \quad (x \to +\infty)$$

Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0, on a

$$\frac{x\ln^2 x}{x^3+1} \sim x\ln^2 x$$

Comme

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$$

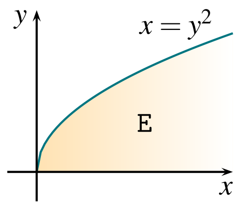
l'intégrande admet un prolongement continu pour $x \to 0^+$, ce qui assure l'intégrabilité dans ce voisinage.

En conclusion, l'intégrale existe.

ii.

Soit

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{1}{(xy)^n}\,dx\,dy \qquad \text{où}$$



Le domaine étant non borné, il est nécessaire de faire appel au critère de Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale. Il faut donc justifier l'existence d'un ordre d'intégration partielle de

$$|f(x,y)| = f(x,y) = \frac{1}{(xy)^n}$$

Le domaine $\mathtt{E}$ peut être décrit

- en faisant varier x de 0 à $+\infty$
- et, pour x fixé, y de 0 à $\sqrt{x}$.

On considère donc la succession d'intégrales partielles

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{y^n}\,dy$$

L'intégrale par rapport à y n'existe pas si $n \geq 1$ car, dans ce cas, la fonction $1/y^n$ n'est pas intégrable dans le voisinage de 0.

Si $n < 1$, la fonction $1/y^n$ est intégrable sur $]0,\sqrt{x}[$ pour presque tout x appartenant à $]0,+\infty[$. Dans ce cas, on calcule

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n}\left[\frac{y^{1-n}}{1-n}\right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{1-n}\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{1-n}}{x^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}(3n-1)}}\,dx$$

Dans cette intégrale par rapport à x, l'intégrande est continu sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, l'intégrabilité demande $(3n-1)/2 > 1$, c'est-à-dire $n > 1$, ce qui est incompatible avec la condition d'existence de la première intégrale partielle.

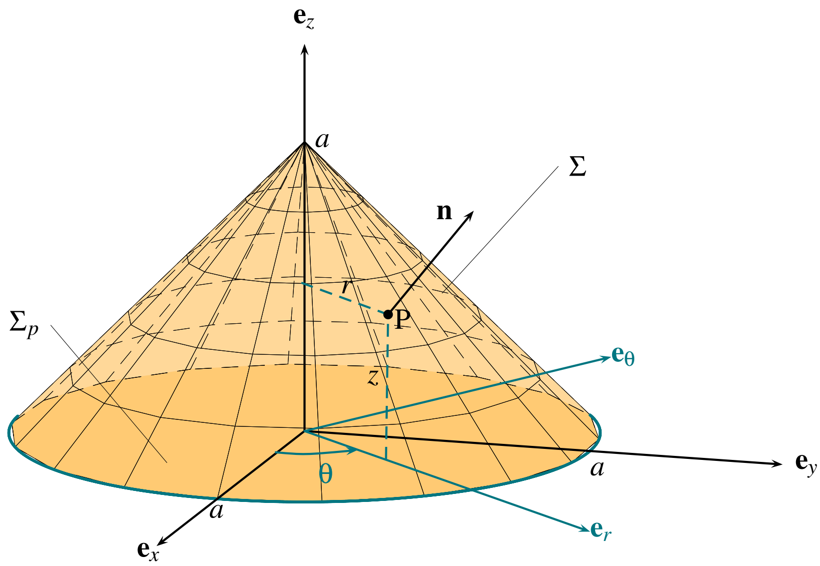
Le critère de Tonelli qui n'est qu'une condition suffisante d'intégrabilité ne permet cependant pas de conclure directement à la non-existence de l'intégrale double donnée.
Par contre, si l'intégrale double de $f(x,y)$ existait sur $\mathtt{E}$, Fubini nous apprend que son calcul pourrait être mené dans n'importe quel ordre d'intégration partielle et donc en particulier dans l'ordre choisi. Comme l'intégrale n'existe pas dans cet ordre, nous pouvons conclure que l'intégrale proposée n'existe pour aucune valeur de n.

Question IV

i. Le cône décrit par

$$x^2+y^2=(a-z)^2, \quad 0 \le z \le a$$

est de hauteur a et repose sur sa base circulaire de rayon a (voir figure).



ii. Le volume à calculer s'exprime par

$$V=\iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

où $\mathtt{E}$ désigne l'intérieur du cône.
Pour décrire $\mathtt{E}$, z varie de 0 à a et, pour un z donné, x et y décrivent le disque de rayon $a-z$. On a donc

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^a dz \iint_{\text{disque de rayon } a-z} dxdy \\
&= \int_0^a \pi(a-z)^2 dz = \pi\int_0^a (a^2+z^2-2az)\,dz = \pi\left[a^2z+\frac{z^3}{3}-az^2\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

On retrouve bien par ce calcul le résultat connu $V=(\pi R^2h/3)$ pour un cône de hauteur $h=a$ et de rayon de la base $R=a$.

iii. Vu la symétrie de révolution de la surface conique Σ, les coordonnées cylindriques sont utilisées pour sa paramétrisation. En coordonnées cylindriques, le cône a pour équation

$$r^2=(a-z)^2, \quad 0 \le z \le a$$

soit $r=a-z$ puisque $a-z \ge 0$.
La surface Σ est décrite par

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(\theta,z) &= r(z)\ \mathbf{e}_r(\theta)+z\mathbf{e}_z \\
&= (a-z)\ \mathbf{e}_r(\theta)+z\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad \theta\in[0,2\pi[,\ z\in[0,a]
\end{aligned}$$

Il vient dès lors successivement

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}=(a-z)\mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z}=-\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_z,$$

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z}=(a-z)\mathbf{e}_z+(a-z)\mathbf{e}_r=(a-z)(\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_z), \qquad \left\|\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z}\right\|=\sqrt{2}(a-z)$$

et, pour presque tout z,

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z)}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0$$

Le champ vectoriel $\mathbf{F}$ s'exprime aussi simplement en fonction des paramètres θ et z sous la forme

$$\mathbf{F} = \beta\, \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{a} = \beta \frac{\mathbf{s}}{a} = \beta \frac{r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z}{a} = \beta \frac{(a-z)\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z}{a}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{\beta}{a} [(a-z)\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z] \cdot \frac{(a-z)(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z)}{\sqrt{2}(a-z)} \sqrt{2}(a-z)\, dz \\
&= \frac{2\pi\beta}{a} \int_0^a \left[(a-z)^2 + z(a-z)\right] dz = \frac{2\pi\beta}{a} \int_0^a (a^2 - az)\, dz \\
&= \frac{2\pi\beta}{a} \left[a^2 z - \frac{az^2}{2}\right]_0^a = \pi\beta a^2
\end{aligned}$$

iv. Le théorème de Gauss s'écrit

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\Sigma_*} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où Σ_* est la surface entourant le volume V et $\mathbf{n}$ la normale extérieure.
Dans ce problème particulier, la surface entourant le volume conique peut être décomposée en la surface conique latérale Σ et la surface plane Σ_p située dans le plan $z = 0$. On a donc

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_p} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

D'une part,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_V \frac{\beta}{a} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV = \frac{3\beta}{a} \iiint_V dV = \frac{3\beta V}{a}$$

où V est le volume du cône. On a donc

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{3\beta}{a} \frac{\pi a^3}{3} = \beta\pi a^2$$

D'autre part,

$$\iint_{\Sigma_p} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

puisque, sur la surface Σ_p, on a $z = 0$, $\mathbf{F} = (\beta/a)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)$ et $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$.
Le théorème de Gauss donne donc

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \beta\pi a^2$$

ce qui confirme le résultat obtenu en calculant directement le flux au point iii.