

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.

Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Question I

- i. Si la suite $\{x_k\}$ (où $x_k \in \mathbb{C}$) converge, en est-il de même de la suite $\{x_k^2\}$? Justifiez.
- ii. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (où $x_k \in \mathbb{C}$) converge, en est-il de même de la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$? Justifiez.
- iii. Si la suite des fonctions $f_k \in C_0([a, b])$ converge sur $[a, b]$ et que la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, peut-on affirmer que la limite de la suite des fonctions $g_k(x) = a_k f_k(x)$ existe et est continue sur $[a, b]$? Justifiez.

Question II

On considère

$$S_{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\beta-1} [k^{(\beta^2)} + 1]}$$

où β désigne un paramètre réel.

- i. Étudiez la convergence de la série pour $\beta = 0$.
- ii. Étudiez la convergence de la série pour $\beta = 1/2$.
- iii. Étudiez la convergence de la série pour $\beta = 1$.
- iv. Déterminez toutes les valeurs de β pour lesquelles la série S_{β} converge.
- v. Sur un même dessin, tracez les courbes d'équation $y = x^k$ pour $x \in [0, 1]$ et $k = 0, 1, 2, \dots$. Calculez les aires des régions comprises entre les courbes successives $y = x^{k-1}$ et $y = x^k$ et déduisez-en la valeur de S_1 .

Question III

En vous basant sur des résultats connus, établissez la représentation en série de puissances de $\arcsin x$. Explicitez les termes de la série en ne faisant intervenir que des puissances et des factorielles.

Déterminez l'intervalle de convergence de la série obtenue ainsi que le domaine de validité de cette représentation.

Suggestion : on fera utilement usage de la formule de Stirling

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}, \quad (k \rightarrow +\infty)$$

SOLUTION TYPE

Question I

- i. Si la suite $\{x_k\}$ (où $x_k \in \mathbb{C}$) converge, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{C}$$

de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^2 = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) = a^2 \in \mathbb{C}$$

puisque la limite du produit est égale au produit des limites quand les limites existent.

On en conclut que la suite $\{x_k^2\}$ (où $x_k \in \mathbb{C}$) converge.

- ii. La propriété énoncée est fausse comme le montre le contre-exemple suivant.

La série numérique de terme général

$$x_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

est convergente en tant que série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers zéro. Par contre, la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

est divergente.

- iii. D'une part, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge de sorte que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ puisqu'il s'agit d'une condition nécessaire de convergence des séries numériques.

D'autre part, la convergence de la suite des fonctions $f_k \in C_0([a, b])$ sur $[a, b]$ signifie que la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existe et est finie pour tout $x \in [a, b]$. Ceci permet donc de définir une fonction f sur $[a, b]$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

La limite d'un produit étant égale au produit des limites si ces limites existent, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k f_k(x)) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) = 0 \cdot f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

La suite $\{g_k(x)\}$ converge donc sur $[a, b]$ vers la fonction nulle, laquelle existe et est continue sur $[a, b]$.

Traduction

mathématique de la convergence : 1 pt

Démonstration de la convergence de $\{x_k^2\}$: 2 pts

Conclusion correcte : 1 pt

Total i. : 4 pts

Pas de point accordé si réponse "Non" sans justification

Contre-exemple correct : 2 pts

Vérification de l'hypothèse : 1 pt

Négation de la thèse : 1 pt

Total ii. : 4 pts

Traduction

de la convergence de la série numérique : 1 pt

Traduction de la convergence de $\{f_k(x)\}$: 1 pt

Calcul de la limite de la suite $\{g_k(x)\}$: 2 pts

Conclusion : 1 pt

Total iii. : 5 pts

TOTAL QI : 13 PTS

Question II

Soit la série à termes positifs

$$S_{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\beta-1} [k^{(\beta^2)} + 1]}$$

Série à termes positifs : 1 pt

i. Pour $\beta = 0$, la série s'écrit

$$S_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2}$$

Elle diverge puisque son terme général ne tend pas vers zéro quand k tend vers l'infini.

Divergence de la série
si $\beta = 0$: 1 pt
Justification : 1 pt
Total i. : 2 pts

ii. Pour $\beta = 1/2$, la série s'écrit

$$S_{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/4} + 1}$$

Son terme général vérifie

$$\frac{1}{k^{1/4} + 1} \sim \frac{1}{k^{1/4}}, \quad (k \rightarrow \infty)$$

ce qui montre que $S_{1/2}$ diverge puisque son terme général est asymptotique à celui d'une série de Riemann divergente.

Divergence de la série
si $\beta = 1/2$: 1 pt
Justification : 1 pt
Total ii. : 2 pts

iii. Pour $\beta = 1$, la série s'écrit

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Son terme général vérifie

$$\frac{1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad (k \rightarrow \infty)$$

de sorte que la série S_1 converge puisque son terme général est asymptotique à celui d'une série de Riemann convergente.

Convergence de la
série si $\beta = 1$: 1 pt

Justification : 1 pt

iv. Dans le cas général où $\beta \neq 0$ (voir i. pour le cas $\beta = 0$), on a

$$\frac{1}{k^{2\beta-1}(k^{(\beta^2)} + 1)} \sim \frac{1}{k^\gamma}, \quad (k \rightarrow \infty)$$

où

$$\gamma = \beta^2 + 2\beta - 1$$

On en déduit que la série converge si $\gamma > 1$ et diverge si $\gamma \leq 1$. La série S_β est donc convergente pour les seules valeurs de β telles que

$$\beta^2 + 2\beta - 2 > 0$$

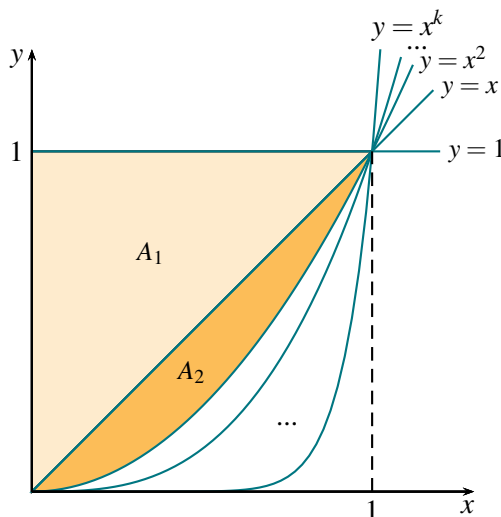
c'est-à-dire

$$\beta \in]-\infty, -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}, +\infty[$$

Total iii. : 2 pts
Comportement
asymptotique : 2 pts,
dont 0.5 pt pour avoir
distingué le cas $\beta = 0$

Divergence si $\gamma \leq 1$:
1 pt
Convergence si $\gamma > 1$:
1 pt
Valeurs
de β pour lesquelles la
série converge : 2 pts
Total iv. : 6 pts

v. Les graphiques des fonctions x^k pour les valeurs successives de $k \in \mathbb{N}$ sont esquissés ci-dessous.



Graphiques des
fonctions x^k : 1 pt

Soit A_k l'aire de la région comprise entre les courbes $y = x^{k-1}$ et $y = x^k$ pour $x \in [0, 1]$. On calcule successivement

$$A_1 = \int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Valeur de A_k : 1.5 pt

$$A_2 = \int_0^1 (x-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$\vdots$

$$A_k = \int_0^1 (x^{k-1} - x^k) dx = \left[\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

Ces résultats permettent d'exprimer S_1 sous la forme

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k : 1 \text{ pt}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

Les régions comprises entre les courbes successives sont disjointes. Elles couvrent tout le carré de côté 1 puisque

$$x^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

Aire totale = aire du carré : 1.5 pt dont 1 pt pour la justification par la limite

La somme des aires A_k correspondantes est donc égale à 1 et

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 1$$

Valeur de S_1 : 1 pt

Question III

Total v. : 6 pts

TOTAL QII : 19 PTS

La fonction $\arcsin x$ est continue sur $[-1, 1]$, s'annule en $x = 0$ et est dérivable sur $] -1, 1[$ avec

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Expression de $\arcsin x$ au moyen d'une fonction connue : 2 pts dont 0.5 pt pour le choix de la primitive

Elle constitue donc la primitive de cette fonction qui s'annule en $x = 0$, soit

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Les résultats relatifs à la série binomiale indiquent que, pour tout $y \in] -1, 1[$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

Considérant $\alpha = -1/2$ et $y = -x^2$ avec $x \in] -1, 1[$, il vient donc

Connaissance de la série binomiale : 1 pt
Intervalle de convergence : 1 pt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}-1\right) \left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \frac{(2k)!}{2^k (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k) k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \frac{(2k)!}{2^k (2^k k!) k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}
\end{aligned}$$

Expression non simplifiée : 1 pt

Expression simplifiée : 2 pts

Toute série de puissances peut être primitivée terme à terme sur son intervalle de convergence et la primitive garde le même intervalle de convergence. On a donc, sur $I =]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k} (2k+1)} x^{2k+1}
\end{aligned}$$

Justification de la primitivation terme à terme : 1 pt

Intervalle de convergence de la primitive : 1 pt

Expression en série de $\arcsin x$: 2 pts, dont 1 pt pour l'expression simplifiée

Ceci constitue l'expression recherchée de la fonction $\arcsin$.

En $x = \pm 1$, la série ci-dessus prend la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k} (2k+1)} (\pm 1)^{2k+1}$$

En module, son terme général est tel que

$$\begin{aligned}
\frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k} (2k+1)} &\sim \frac{\sqrt{4\pi k} (2k)^{2k} e^{-2k}}{(\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k})^2 2^{2k} (2k+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi k} (2k+1)}, \quad (k \rightarrow \infty) \\
&\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k^{3/2}} \right), \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

Utilisation correcte de la formule de Stirling : 1 pt

Convergence absolue en ± 1 : 2 pts, dont 1 pt pour la justification. Le

caractère absolu n'est pas indispensable.

Détermination de E : 2 pts dont 1 pt pour la justification par la continuité.

On en déduit que la série converge absolument en $x = \pm 1$ puisque le terme général de la série des modules est asymptotique à celui d'une série de Riemann convergente.

Toute série de puissances restant continue aux extrémités de son intervalle de convergence où elle converge et la fonction $\arcsin$ étant continue en $x = \pm 1$, il vient, par continuité,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k} (2k+1)} x^{2k+1} \quad \forall x \in E = [-1, 1]$$

TOTAL QIII : 16 PTS

Question I

- i. • La démonstration pouvait être menée assez simplement, comme dans la solution-type, en utilisant le résultat connu qui dit que la limite d'un produit est égale au produit des limites si ces limites existent. Quand un résultat connu est utilisé dans une démonstration, il faut énoncer celui-ci explicitement et en vérifier les hypothèses. Ici, il convenait donc de traduire la convergence de la suite $\{x_k\}$ en l'existence de sa limite et d'énoncer le résultat concernant la limite du produit.
- De façon alternative, la démonstration pouvait aussi être menée directement à partir de la définition de la limite. Par cette définition, la convergence de la suite $\{x_k\}$ vers a signifie que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geq N) : |x_k - a| \leq \varepsilon$$

On en déduit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |x_k^2 - a^2| &= |x_k - a| |x_k + a| \\ &= |x_k - a| |(x_k - a) + 2a| \\ &\leq \varepsilon(\varepsilon + |2a|) \end{aligned}$$

La différence $|x_k^2 - a^2|$ pouvant être rendue arbitrairement petite pour tous les k suffisamment grands, on en déduit que la suite $\{x_k^2\}$ converge vers a^2 .

- ii. Pour démontrer qu'un énoncé est faux, la façon la plus efficace est de donner un contre-exemple. Dans ce cas, il faut montrer que cet exemple vérifie les hypothèses de l'énoncé mais n'en vérifie pas la thèse. Le contre-exemple le plus évident est ici donné par la série des $x_k = (-1)^k / \sqrt{k}$. La convergence de cette série doit être justifiée correctement par le fait qu'il s'agit d'une série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers 0. La série de terme général $x_k^2 = 1/k$ est quant à elle la série harmonique dont on sait qu'elle diverge. On sera attentif aux éléments qui suivent.
- Rien n'est précisé sur le signe du terme général x_k de la série. Il ne s'agit donc pas forcément d'une série à termes positifs. On n'a donc pas $x_k^2 < x_k$ pour k suffisamment grand même si x_k tend vers 0 en tant que terme général d'une série convergente. Par ailleurs, le critère de comparaison n'est d'aucune utilité ici puisqu'il ne peut s'appliquer qu'à des séries à termes positifs.
 - Si $x_k \rightarrow 0$, cela implique évidemment que $x_k^2 \rightarrow 0$. Rappelons cependant qu'une série dont le terme général tend vers 0 n'est pas forcément convergente. Il s'agit d'une condition nécessaire de convergence, pas suffisante.
 - Il ne faut pas confondre

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \right)^2$$

- iii. • Quand un énoncé est vrai, il faut le démontrer de façon rigoureuse. Un exemple ne constitue jamais la démonstration d'une propriété.
- Il était question dans cet énoncé d'une suite de fonctions et d'une série numérique. Il ne fallait pas confondre les notions de suite et de série. En particulier, si une série converge, son terme général tend vers 0. Par contre, si une suite converge, son terme général ne tend pas forcément vers 0. Le terme général d'une suite numérique convergente tend vers un nombre, réel ou complexe, et celui d'une suite de fonctions convergente vers une fonction définie sur le domaine de convergence de la suite.
 - La démonstration demandait ici aussi de faire appel au résultat connu de la limite d'un produit qui est égale au produit des limites si ces limites existent. Comme au point i., ce résultat devait être énoncé et l'existence des limites des deux facteurs du produit justifiée correctement en utilisant les hypothèses données dans l'énoncé sur la suite des f_k et la série des a_k .

Question II

Afin de pouvoir appliquer les critères de convergence adaptés à ce type de séries, il est nécessaire de préciser que la série étudiée est à termes positifs avant toute autre chose.

- i. RAS
- ii. RAS
- iii. RAS
- iv. • Le comportement asymptotique du terme général de la série ne s'exprime pas de la même façon si $\beta \neq 0$ ou si $\beta = 0$. Dans le premier cas, on a en effet

$$\frac{1}{k^{2\beta-1}(k^{(\beta^2)} + 1)} \sim \frac{1}{k^{\beta^2+2\beta-1}}, \quad (k \rightarrow \infty) \quad (\spadesuit)$$

car $1 = o(k^{\beta^2})$. Cependant, 1 n'est pas négligeable par rapport k^{β^2} au voisinage de l'infini lorsque $\beta = 0$. Dans ce cas, on a $(k^{(\beta^2)} + 1) = 2$ et

$$\frac{1}{k^{2\beta-1}(k^{(\beta^2)} + 1)} = \frac{k}{2}, \quad (k \rightarrow \infty)$$

alors que l'expression générale () conduirait indûment à conclure que l'expression est asymptotique à k .

- Il ne suffisait pas de montrer la convergence de la série pour certaine valeurs de β . Il fallait aussi justifier que la série divergeait pour les autres valeurs. Ici, le terme général ne fait intervenir que des puissances de k de sorte que son comportement asymptotique au moyen de puissances permet à la fois de déterminer les valeurs de β pour lesquelles la série converge et celles pour lesquelles la série diverge. Il était cependant indispensable de le mentionner.
- v. • Les graphiques des fonctions x^k doivent être correctement représentés. En particulier, ils passent tous par les points $(0,0)$ et $(1,1)$.
- L'énoncé suggérait que la valeur de S_1 pouvait être déduite du raisonnement géométrique demandé. Il fallait donc réfléchir à comment relier S_1 aux aires successives entre les différentes courbes.
- Même s'il pouvait sembler évident que la série S_1 , somme des aires successives entre les différentes courbes, convergeait vers l'aire du carré de côté 1, il était indispensable de le démontrer en vérifiant que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0 \forall x \in]0, 1[$.

Question III

- La fonction arcsin peut être reliée par primitivation à la fonction $1/\sqrt{1-x^2}$. Les primitives d'une fonction étant définies à une constante près, il est cependant indispensable de préciser quelle primitive est à considérer. Il s'agit ici de la primitive qui s'annule en $x = 0$, ce qui peut se traduire mathématiquement par

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

- Toutes les opérations effectuées sur les séries de puissances doivent être justifiées théoriquement. En particulier ici, une série de puissances peut être primitivée terme à terme sur son intervalle de convergence et la primitive garde le même intervalle de convergence que la série initiale. Cet intervalle de convergence doit donc être déterminé. La série initiale est ici la série binomiale évaluée en $-t^2$. L'intervalle de convergence de la série binomiale étant $] -1, 1[$, celui de la série à primitiver est obtenu pour $-t^2 \in] -1, 1[$, soit $I =] -1, 1[$.

- Il était demandé que les termes de la série ne fassent intervenir que des puissances et des exponentielles. Il fallait donc simplifier l'expression des coefficients binomiaux qui faisaient intervenir des factorielles. On sera attentif au fait que la formule de Stirling n'est valable que pour décrire le comportement asymptotique pour $k \rightarrow +\infty$. Elle n'établit pas une égalité entre ses deux termes et ne peut donc être utilisée pour remplacer la factorielle par une expression alternative pour un k quelconque. Elle ne peut être utilisée que pour étudier le comportement asymptotique du terme général pour $k \rightarrow +\infty$.
- On sera attentif à ne pas commettre d'erreurs lors de la manipulation des puissances. En particulier,

$$(-x^2)^k \neq (-x)^{2k} \quad \text{mais} \quad (-x^2)^k = (-1)^k x^{2k}$$

- L'énoncé distinguait clairement l'intervalle de convergence de la série obtenue et le domaine de validité de la représentation en série de puissances.

Par définition, l'intervalle de convergence d'une série de puissances est toujours un intervalle ouvert, le plus grand intervalle ouvert sur lequel la série converge absolument. Même si la série converge en une ou en les deux extrémités de son intervalle de convergence, ces points ne sont pas inclus dans l'intervalle de convergence de sorte que celui-ci reste un ouvert.

L'intervalle de convergence de la série est obtenu ici par construction grâce à la connaissance de celui de la série binomiale. Il est inutile de vérifier cela autrement.

Le domaine de validité de la représentation en série de puissances obtenue peut éventuellement s'étendre aux extrémités de l'intervalle de convergence où la série converge. Il fallait donc vérifier cette convergence en $x = \pm 1$, ce qui pouvait être fait grâce à l'utilisation de la formule de Stirling.

Le fait que la série converge aux extrémités de l'intervalle de convergence ne suffit cependant pas à assurer qu'elle converge bien vers les valeurs $\arcsin(\pm 1)$. Ceci peut être justifié par continuité puisque la fonction arcsin et la série obtenue sont égales sur $] -1, 1[$ et toutes deux continues en ± 1 . Rappelons qu'une série de puissances définit une fonction continue sur son intervalle de convergence et aux extrémités de celui-ci où elle converge.