LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Avril 2026

MATH0502 - Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Question I

i. Si f est réelle et intégrable sur $]1,+\infty[$, f^2 est-elle intégrable sur ce même intervalle ? Justifiez.

ii. Si f est intégrable au voisinage de $+\infty$, peut-on en déduire qu'il existe $C \neq 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha}, \quad (x \to +\infty)\ ?$$

iii. On considère la suite des fonctions $f_n(x) = \min\{1, n(x-1)^2\}$. Par application du théorème de Lebesgue, montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

et déterminez la valeur de cette expression.

Question II

Évaluez l'intégrale ci-dessous en changeant l'ordre d'intégration. Justifiez votre réponse.

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}\,dx$$

Question III

On considère un silo $\mathcal{S}$ en forme de pyramide, de hauteur h et de base carrée de côté a, posée sur sa pointe. Le silo est rempli de gravillons et, vu que d'avantage de particules de petite taille s'accumulent dans le bas en laissant moins d'espace vide entre elles, on peut estimer que sa densité (masse par unité de volume) est une fonction de la hauteur z au-dessus de la pointe, soit

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right)$$

où ρ_0 est une constante strictement positive.

i. Calculez la masse du silo, c'est-à-dire

$$m = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(z)\,dxdydz$$

ii. Vu la symétrie, le centre d'inertie du silo se trouve sur l'axe vertical passant par la pointe. Déterminez à quelle hauteur z_C au-dessus de la pointe se trouve le centre d'inertie si

$$m\,z_C = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(z) z\,dxdydz$$

SOLUTION TYPE

Question I

i. On ne peut pas déduire cela. Considérons par exemple la fonction

Réponse donnée sans justification : 0 pt

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$$

La fonction f est réelle et intégrable sur $]1,+\infty[$ puisque

- $f \in C_0(]1,+\infty[)$;
- f est intégrable au voisinage de 1 car

$$\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad (x \to 1^+)$$

- f est intégrable au voisinage de $+\infty$ car

$$\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \quad (x \to +\infty)$$

Production d'un contre-exemple correct : 2 pts
Justification de l'intégrabilité de f : 2 pts
Justification de la non-intégrabilité de f^2 : 1 pt

Par contre,

$$f^2(x) = \frac{1}{x^2(x-1)} \sim \frac{1}{x-1}, \quad (x \to 1^+)$$

de sorte que f^2 n'est pas intégrable au voisinage de 1. Dès lors, $f^2 \notin \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$.

Total i. : 5 pts

ii. Si f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on ne peut pas en déduire qu'il existe $C \neq 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha}, \quad (x \to +\infty)$$

Il suffit de considérer le contre-exemple constitué de la fonction

Contre-exemple valable : 2 pts

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

Cette fonction est intégrable au voisinage de l'infini puisque

Justification de l'intégrabilité : 1.5 pts

$$\mathrm{e}^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \to +\infty)$$

Elle n'est cependant pas d'ordre polynômial, *i.e.* il n'existe pas de constantes $C \neq 0$ et α telles que

Justification du caractère non polynomial :1.5 pt

$$\mathrm{e}^{-x} \sim \frac{C}{x^\alpha}, \quad (x \to +\infty)$$

En effet, on a

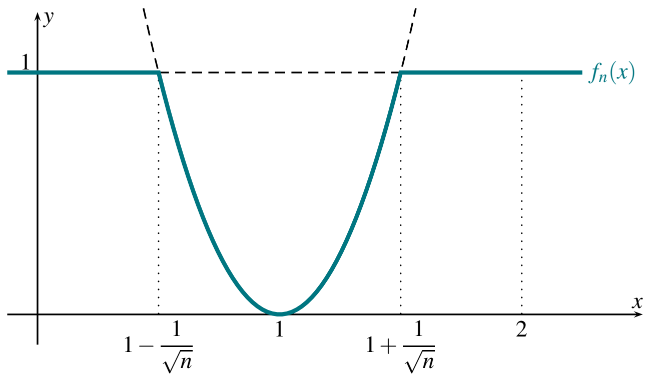
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

de sorte que, quels que soient $\alpha > 1$ et $C \neq 0$,

Total ii. : 5 pts

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{C}{x^\alpha}} \neq 1$$

iii. Soit la suite des fonctions $f_n(x) = \min\left\{1, n(x-1)^2\right\}$ dont le graphique est esquissé ci-dessous pour $n > 1$.



Les hypothèses du théorème de Lebesgue sont satisfaites.

- $f_n \in \mathbb{L}_1(]0,2[)$ puisque f_n est continue sur le compact $[0,2]$.
- Puisque
$$\lim_{n\to\infty} n(x-1)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=1 \\ +\infty & \text{si} \quad x\neq 1 \end{cases}$$
on a
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=1 \\ 1 & \text{si} \quad x\neq 1 \end{cases}$$
Dès lors, la suite des f_n converge vers la fonction $f=1$ presque partout sur $]0,2[$.
- Vu le minimum, $|f_n(x)| \leq 1 \in \mathbb{L}_1(]0,2[)$ presque partout sur $]0,2[$ et pour tout n.

Ceci justifie le passage de la limite sous le signe d'intégration, *i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x) \ dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = \int_0^2 1 \ dx = 2$$

$f_n \in \mathbb{L}_1(]0,2[)$: 0.5 pt
Justification par $f_n \in C_0([0,2])$ (ou par application du critère de Lebesgue) : 1.5 pt
Valeur de la limite : 1 pt
Convergence presque partout vers $f=1$: 1 pt
Majoration : 2 pts
Conclusion : 1 pt
Valeur de l'expression : 1 pt
Total iii. : 8 pts
TOTAL QI :18 PTS

Question II

L'expression

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} \, dx$$

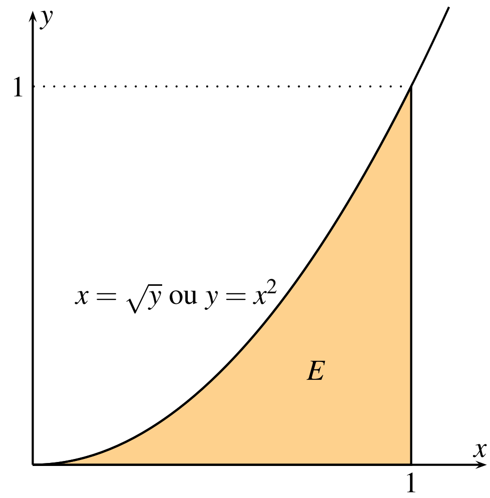
ne peut être que difficilement calculée telle quelle. Elle est cependant égale à l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathtt{E}} \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} \, dxdy \qquad \text{où} \quad \mathtt{E} = \{(x,y) : 0<y<1, \ \sqrt{y}<x<1\}$$

si celle-ci existe et elle pourra, dans ce cas, être calculée dans l'autre ordre d'intégration partielle (Fubini).

Égalité avec l'intégrale dans l'autre ordre d'intégration partielle si l'intégrale double existe : 1 pt

Identification (mathématique ou graphique) du domaine : 2 pts



Appel à Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale double : 1 pt

La fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}$$

n'est pas continue sur $\bar{E}$, l'adhérence de E, puisqu'elle n'est pas définie au point $(0,0)$. L'intégrabilité pourra cependant être justifiée, en vertu du critère de Tonelli, si on trouve un ordre d'intégration partielle de $|f(x,y)| = f(x,y)$ qui existe.

Application de Tonelli à f car $|f| = f$: 1 pt

En inversant l'ordre d'intégration proposé dans l'énoncé pour ce calcul, on est conduit à évaluer

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dy \qquad (\spadesuit)$$

Intégrale avec ordre inversé : 2 pts

L'intégrale

$$I_1 = \int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dy$$

Justification de l'existence de I_1 : 1 pt

est définie puisque l'intégrande est continu par rapport à y sur le compact $[0,x^2]$ pour presque tout $x \in]0,1[$. Sa valeur est donnée par

$$\int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dy = \left[\frac{-x^2}{2(4x^2+y^2)}\right]_0^{x^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(4+x^2)}$$

Valeur de I_1 : 2.5 pts

En injectant cette valeur dans l'expression ($\spadesuit$), on est amené à considérer

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2(4+x^2)}\right) dx$$

L'intégrale I_2 est également définie en vertu de la continuité de l'intégrande sur le compact $[0,1]$. Sa valeur est donnée par

Justification de l'existence de I_2 : 1 pt

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2(4+x^2)}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

Valeur de I : 2.5 pts

Dès lors

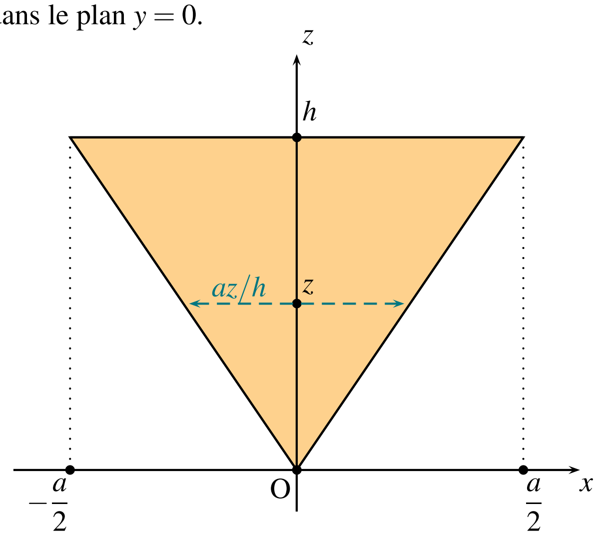
$$I = I_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

TOTAL QII : 14 PTS

Question III

i. Plaçons le silo pyramidal dans un repère orthonormé d'axes OX, OY et OZ, les côtés de la base carrée parallèlement aux axes OX et OY et l'axe de symétrie du silo passant par la pointe de la pyramide selon l'axe OZ. Nous pouvons représenter la section du silo dans le plan $y = 0$.

Représentation du domaine (ou d'une section triangulaire) : 1 pt, dont 0.5 pt pour l'indication des dimensions utilisées dans les calculs qui suivent



Tenant compte de l'expression de la densité $\rho(z)$, la masse du silo est telle que

Expression intégrale de la masse : 1 pt

$$m = \iiint_{\mathcal{S}} \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) \, dxdydz$$

Pour décrire $\mathcal{S}$,

- z varie de 0 à h
- et, pour z fixé, x et y décrivent le carré de côté $\dfrac{az}{h}$.

On a donc

Réduction de l'intégrale : 3 pts

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_{\mathcal{S}} \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) \, dxdydz \\
&= \int_0^h \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) \, dz \iint_{\text{carré de côté } \frac{az}{h}} dxdy \\
&= \int_0^h \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) \left(\frac{az}{h}\right)^2 \, dz \\
&= \rho_0 \frac{a^2}{h^2} \int_0^h \left(z^2 + z^2 - \frac{z^3}{h}\right) \, dz \\
&= \rho_0 \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{2z^3}{3} - \frac{z^4}{4h}\right]_0^h = \rho_0 \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{2h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right) \\
&= \frac{5}{12} \rho_0 a^2 h
\end{aligned}$$

Valeur exacte : 3 pts

Nous pouvons remarquer que l'expression obtenue a bien les dimensions d'une masse puisqu'elle s'exprime comme le produit d'un volume et d'une masse volumique.

Total i. : 8 pts

ii. La hauteur z_C à laquelle se trouve le centre d'inertie vérifie

$$z_C = \frac{1}{m}\iiint_S \rho(z) z \, dxdydz$$

On a donc

Réduction de l'intégrale : 1 pt

$$\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{m}\iiint_S \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) z \, dxdydz \\
&= \frac{1}{m}\int_0^h \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) z \, dz \iint_{\text{carré de côté } \frac{az}{h}} dxdy \\
&= \frac{1}{m}\int_0^h \rho_0 \left(1 + \frac{h-z}{h}\right) z \left(\frac{az}{h}\right)^2 dz \\
&= \frac{1}{m}\rho_0 \frac{a^2}{h^2}\int_0^h \left(z^3 + z^3 - \frac{z^4}{h}\right) dz \\
&= \frac{1}{m}\rho_0 \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{2z^4}{4} - \frac{z^5}{5h}\right]_0^h = \frac{1}{m}\rho_0 \frac{a^2}{h^2}\left(\frac{2h^4}{4} - \frac{h^4}{5}\right) \\
&= \frac{1}{m}\frac{3}{10}\rho_0 a^2 h^2
\end{aligned}$$

Valeur de l'intégrale triple / Valeur exacte de z_C avec m : 1 pt

Soit, en introduisant la masse calculée au point i.,

$$z_C = \frac{12}{5\rho_0 a^2 h}\frac{3}{10}\rho_0 a^2 h^2 = \frac{18}{25}h$$

Valeur exacte fonction de h : 1 pt

Total ii. : 3 pts

Nous pouvons vérifier que z_C a les dimensions d'une longueur et que le centre d'inertie se situe dans le silo.

TOTAL QIII : 11 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- Un exemple ne permet jamais de démontrer qu'une proposition est vraie. Pour qu'une proposition soit vraie, il faut qu'elle le soit quel que soit l'exemple considéré. Elle doit donc être démontrée de façon tout à fait générale. Par contre, un contre-exemple suffit à démontrer qu'une proposition est fausse.
- La façon la plus efficace de démontrer qu'un énoncé est faux est d'ailleurs très souvent de donner un contre-exemple. Ce contre-exemple doit évidemment vérifier les hypothèses et contredire la thèse. Il ne suffit pas de citer le contre-exemple mais également de montrer explicitement qu'il vérifie les hypothèses et contredit la thèse.
  En l'espèce, il fallait donc trouver ici une fonction intégrable sur $]1,+\infty[$ mais dont le carré ne l'est pas, et justifier chacun de ces éléments.
  Remarquons que, en particulier, la fonction $1/\sqrt{x-1}$, souvent citée comme contre-exemple, ne convient pas puisqu'elle n'est pas intégrable au $V(+\infty)$.

ii.
- L'énoncé à considérer affirme que, si f est intégrable au voisinage de $+\infty$, alors il existe $C \neq 0$ et $\alpha > 1$ tels que $f(x) \sim C/x^\alpha$ au voisinage de $+\infty$. Cet énoncé est la réciproque d'un critère d'intégrabilité bien valable : si $f(x) \sim C/x^\alpha$ au voisinage de $+\infty$, alors f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Cependant, la proposition soumise dans le questionnaire est fausse.
- Comme rappelé ci-dessus, un contre-exemple vérifiant les hypothèses et niant la thèse permet de démontrer qu'une proposition est fausse. Il fallait ici être attentif à vérifier explicitement l'hypothèse d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et à justifier de façon rigoureuse que la fonction choisie comme contre-exemple ne se comportait pas au voisinage de $+\infty$ comme C/x^α avec $C \neq 0$ et $\alpha > 1$.

iii. Le théorème de Lebesgue comprend 3 hypothèses. Ces hypothèses ne doivent pas seulement être citées. Elles doivent être vérifiées pour la suite des fonctions $f_n(x)$ sur le domaine d'intégration $]0,2[$ de l'énoncé.
- L'intégrabilité des f_n sur le domaine $]0,2[$ doit être justifiée, par exemple en se basant sur la continuité de ces fonctions sur le compact $[0,2]$. Ceci est évident si on prend la peine de représenter graphiquement $f_n(x)$.
- Le calcul de la limite de f_n pour n tendant vers l'infini montre que la suite converge presque partout sur $]0,2[$ vers la fonction constante $f = 1$.
- L'expression des $f_n(x)$, comme leur graphique, indique aussi qu'elles sont majorées (presque partout) sur $]0,2[$ par la fonction $f = 1$ qui est intégrable sur ce domaine.

La vérification de ces 3 hypothèses permet de justifier le passage de la limite sous le signe d'intégration.

Question II

- Quand le calcul d'une suite d'intégrales partielles ne peut être mené dans l'ordre proposé, il ne suffit pas de considérer le calcul dans l'ordre inverse. Il faut aussi justifier le renversement de l'ordre d'intégration en montrant l'existence de l'intégrale double. Celle-ci permet d'affirmer, par Fubini, que les deux ordres d'intégration partielle conduisent au même résultat.
-
  - ◇ Tout exercice de calcul intégral à plusieurs dimensions demande une identification précise du domaine d'intégration, idéalement explicitée graphiquement. C'est le point de départ essentiel de ce type d'exercice car cela permet de vérifier si le domaine est borné, de réduire correctement l'intégrale ou de renverser l'ordre d'intégration.
  - ◇ Les bornes d'intégration définissent le domaine. La variable y varie ici entre 0 et 1 et, pout y fixé, la variable x varie entre $\sqrt{y}$ et 1. Le domaine est donc situé en dessous de la parabole $y = x^2$ et pas au-dessus, comme on le voit dans de nombreuses réponses erronées.

- ◇ L'identification du domaine d'intégration révèle que l'intégrande $x^2y/(4x^2+y^2)^2$ n'est pas continu sur un compact, puisqu'il n'est pas défini au point $(0,0)$ de la frontière du domaine d'intégration. La justification de l'existence de l'intégrale se fait donc via le critère de Tonelli.
- Le critère de Tonelli affirme que l'intégrale existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a du sens. Même si l'intégrande est manifestement positif, il ne faut pas oublier de mentionner que $|f| = f$ et que la justification de l'existence de l'intégrale peut dès lors être réalisée sur base de f, en même temps que le calcul.
- L'application du critère demande de justifier chacune des intégrales partielles successives pour presque toutes les valeurs des variables par rapport auxquelles l'intégration est réalisée ultérieurement. Il fallait donc ici procéder méthodiquement, en commençant par justifier l'existence de l'intégrale par rapport à y sur $[0,x^2]$ pour presque tout x dans $[0,1]$, ce qui permettait de ne pas considérer $x = 0$ et de garantir la continuité de l'intégrande par rapport à y sur $[0,x^2]$, puis justifier l'intégrale par rapport à x par la continuité de l'intégrande sur $[0,1]$.

Question III

- Le problème pouvait être résolu en évaluant les intégrales sur le quart de pyramide situé dans le premier octant vu la symétrie du domaine et l'expression de l'intégrande. Dans ce cas, la section du domaine à la hauteur h est un carré de côté $a/2$ et pas a contrairement à ce qui a été lu dans de nombreuses copies.
- Quand un énoncé est dimensionnellement correct, ce qui est bien le cas ici, la réponse finale doit avoir les dimensions attendues. Ici, les réponses des points i. et ii. devaient avoir respectivement les dimensions d'une masse et d'une longueur. Ces vérifications permettent de repérer facilement certaines erreurs éventuelles conduisant à des résultats qui n'ont pas de sens.