Octobre 2024

MATH0013 - ALGÈBRE

ÉVALUATION FORMATIVE

Prof. Éric J.M.DELHEZ

- *Indiquez lisiblement votre nom et votre prénom en MAJUSCULES ainsi que votre matricule (format 2023...) aux emplacements prévus.*
- *Rédigez vos réponses aux questions dans les emplacements vides prévus à cet effet sur l'énoncé. Si vous manquez de place, terminez votre réponse sur une ou plusieurs pages que vous ajouterez* ***à la fin*** *du questionnaire. à l'endroit prévu, indiquez clairement en majuscules et dans un cadre que votre réponse continue sur une page supplémentaire. Sur cette page complémentaire indiquez le numéro de la question à laquelle se rapporte votre réponse.*
- *Soumettez vos copies (toutes les pages, dans l'ordre, même celles sur lesquelles vous n'auriez pas écrit) via Gradescope (www.gradescope.com) au plus tard pour le 16 octobre à 10h00.*

Question I

Les matrices de Fourier F_n interviennent dans le calcul de la *transformée de Fourier rapide* (FFT) permettant d'analyser le contenu fréquentiel de signaux discrets. La matrice F_n est une matrice carrée d'ordre n telle que

$$(\mathsf{F}_n)_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{2i\pi(j-1)(k-1)/n}, \qquad j,k \in \{1,2,\dots,n\}$$

i. Formez la matrice F_3.
ii. Calculez le déterminant de F_3.
iii. Montrez que F_3 est unitaire.

Question II

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, déterminez le rang de la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \gamma & \gamma & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et identifiez les relations linéaires existant éventuellement entre les colonnes de A.

Question III

Soit A une matrice carrée réelle et B la matrice formée à partir de A selon

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{A} \end{pmatrix}$$

i. Déterminez des conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir la matrice A pour que B soit normale.
ii. Montrez que B est orthogonale si et seulement si A est symétrique et telle que $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$.

Question I

i. Ses éléments étant donnés par $(\mathsf{F}_n)_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{2i\pi(j-1)(k-1)/n}$, la matrice F_3 s'écrit

$$\mathsf{F}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{0i} & \mathrm{e}^{0i} & \mathrm{e}^{0i} \\ \mathrm{e}^{0i} & \mathrm{e}^{2i\pi/3} & \mathrm{e}^{4i\pi/3} \\ \mathrm{e}^{0i} & \mathrm{e}^{4i\pi/3} & \mathrm{e}^{8i\pi/3} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{0i} &= 1 \\ \mathrm{e}^{2i\pi/3} &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{e}^{4i\pi/3} &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{e}^{8i\pi/3} &= \mathrm{e}^{i(8\pi/3-2\pi)} = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\mathsf{F}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Total i. (sous forme trigonométrique ou algébrique) : 2 pts

ii. Effectuons des opérations élémentaires sur les rangées de la matrice pour simplifier le calcul du déterminant. En soustrayant la troisième ligne à la deuxième, on a

$$\det\mathsf{F}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i\,\sqrt{3} & -i\,\sqrt{3} \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

Ajoutant ensuite la deuxième colonne à la troisième, et développant le déterminant selon la deuxième ligne de la matrice, il vient

$$\begin{aligned} \det\mathsf{F}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & i\,\sqrt{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,i\,\sqrt{3}(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{i}{3}(-1-2) = -i \end{aligned}$$

Méthode correcte de calcul du déterminant : 1 pt
Présence de l'exposant 3 sur le facteur multiplicatif : 1 pt
Valeur exacte du déterminant : 1 pt
Valeur exacte du déterminant simplifiée : 1 pt
Total ii. : 4 pts

iii. La matrice F_3 est unitaire si son inverse est égale à son adjointe, c'est-à-dire si

$$\mathsf{F}_3^* = \mathsf{F}_3^{-1}$$

Utilisant la définition de l'inverse d'une matrice carrée, ceci revient donc à montrer que

$$\mathsf{F}_3\mathsf{F}_3^* = \mathbb{I}_3$$

Concept de matrice unitaire : 1 pt

Expression de F_3^* : 1 pt

Développant ce produit matriciel, on a bien

Calcul de F_3^{-1} ou de $\mathsf{F}_3\mathsf{F}_3^* = \mathbb{I}$: 1 pt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons que le module du déterminant calculé au point ii. est égal à 1, ce qui est une des propriétés des matrices unitaires mais ne garantit pas que la matrice est unitaire.

Total iii. : 3 pts

TOTAL QI : 9 PTS

Question II

Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme normale échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible : 2 pts

Attention : dans les cas où le rang vaut 2, il faut montrer ou annoncer que tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls pour mériter les points du principe.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée sans modifier son rang ni les éventuelles relations linéaires entre les colonnes. Partant de

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \gamma & \gamma & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

il vient successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \gamma-2 & \gamma-1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

- Si $\gamma \neq 2$, on continue l'échelonnage en divisant la deuxième ligne par $\gamma - 2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\gamma-1}{\gamma-2} & \frac{-1}{\gamma-2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

La présence de signes d'égalité entre les matrices successives donne lieu à une pénalité de 2 pts pour l'exercice.

$$\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\gamma}{\gamma-2} & \frac{2\gamma-2}{\gamma-2} \\ 0 & 1 & \frac{\gamma-1}{\gamma-2} & \frac{-1}{\gamma-2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

puis, divisant par -2 la troisième ligne,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{-\gamma}{\gamma-2} & \dfrac{2\gamma-2}{\gamma-2} \\ 0 & 1 & \dfrac{\gamma-1}{\gamma-2} & \dfrac{-1}{\gamma-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et enfin,

$$\begin{array}{c} \ell_1 \to \ell_1 + \dfrac{\gamma}{\gamma-2} l_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \dfrac{(\gamma-1)}{(\gamma-2)} \ell_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 3 dans ce cas. *Rang si $\gamma \neq 2$: 2 pts*

Les opérations élémentaires portant sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. Il existe donc dans ce cas une relation linéaire entre les colonnes qui peut s'écrire

Nombre de relations linéaires exact : 1 pt

Relation linéaire : 1 pt

$$c_4 = c_1 + c_2 - c_3$$

- Si $\gamma = 2$, la matrice $(*)$ devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Commençons par échanger la deuxième et la troisième colonne, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notons que cet échange de colonnes modifie les relations linéaires entre les colonnes et qu'il faudra être attentif à la renumérotation de celles-ci.
Ensuite, continuant l'échelonnage, il vient

$$\begin{array}{c} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + 2\ell_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 2 dans ce cas. *Rang si $\gamma = 2$: 2 pts*

Il y a deux relations linéaires entre les colonnes qui peuvent s'écrire (puisque les colonnes 2 et 3 ont été échangées dès le début de l'échelonnage)

Nombre de relations linéaires exact : 1 pt

Relations linéaires : 0.5 pt par relation

$$c_3^{new} = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_4 = 3c_1 - c_2^{new}$$

soit

$$c_2 = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_4 = 3c_1 - c_3$$

En conclusion,

- si $\gamma \neq 2$, $\rho(A) = 3$ et $c_4 = c_1 + c_2 - c_3$;
- si $\gamma = 2$, $\rho(A) = 2$, $c_2 = 2c_1$ et $c_4 = 3c_1 - c_3$.

Présence d'une conclusion cohérente avec les résultats obtenus : 1 pt

TOTAL QII : 11 PTS

Question III

i. La matrice B est normale si elle commute avec son adjointe, *i.e.* si

Connaissance du concept de matrice normale : 1 pt

$$\mathsf{B}^*\mathsf{B} = \mathsf{B}\mathsf{B}^*$$

Puisque A est réelle, B est également réelle et $\mathsf{B}^* = \mathsf{B}^T$. Il convient donc de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$\mathsf{B}^* = \mathsf{B}^T$ car A et donc B sont réelles : 1 pt dont 0.5 pt pour la justification

$$\mathsf{B}^T\mathsf{B} = \mathsf{B}\mathsf{B}^T$$

On calcule successivement

Valeur de B^T : 1 pt (valorisé ici ou au ii.)

$$\mathsf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{A} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^T & \mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A} & \mathsf{A}^T \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{B}^T\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^T & \mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A} & \mathsf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathsf{A}^T\mathsf{A} & -\mathsf{A}^T\mathsf{A}^T + \mathsf{A}^T\mathsf{A} \\ -\mathsf{A}\mathsf{A} + \mathsf{A}^T\mathsf{A} & \mathsf{A}\mathsf{A}^T + \mathsf{A}^T\mathsf{A} \end{pmatrix}$$

et

Valeur de $\mathsf{B}^T\mathsf{B}$: 1 pt (valorisé ici ou en ii.)

Valeur de $\mathsf{B}\mathsf{B}^T$: 1 pt (valorisé ici ou en ii.)

$$\mathsf{B}\mathsf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A}^T & \mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A} & \mathsf{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}\mathsf{A}^T + \mathsf{A}^T\mathsf{A} & \mathsf{A}\mathsf{A}^T - \mathsf{A}^T\mathsf{A}^T \\ \mathsf{A}\mathsf{A}^T - \mathsf{A}\mathsf{A} & 2\mathsf{A}\mathsf{A}^T \end{pmatrix}$$

Par identification des blocs correspondants, on en déduit que B est normale si et seulement si

Identification des éléments : 1 pt

$$\begin{cases} 2\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^T + \mathsf{A}^T\mathsf{A} \\ -\mathsf{A}^T\mathsf{A}^T + \mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^T - \mathsf{A}^T\mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A}\mathsf{A} + \mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^T - \mathsf{A}\mathsf{A} \\ \mathsf{A}\mathsf{A}^T + \mathsf{A}^T\mathsf{A} = 2\mathsf{A}\mathsf{A}^T \end{cases}$$

Condition A normale : 3 pts

Les deuxième et troisième conditions se simplifient en $\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^T$ qui demande donc à la matrice A d'être normale. Sous cette condition, les première et quatrième égalités sont automatiquement vérifiées.

En conclusion, la matrice B est normale si et seulement si A est elle-même normale.

Conclusion sous forme d'une condition nécessaire et suffisante : 1 pt

Total i. : 10 pts

ii. On doit démontrer que

$$\mathsf{B} \text{ est orthogonale} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{A} \text{ est symétrique et } 2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$$

Notons d'abord que l'affirmation du caractère orthogonal ou symétrique d'une matrice demande que celle-ci soit réelle. Or, grâce à la façon dont la matrice B est construite, B est réelle si et seulement si A est réelle. Cet aspect est donc aisément réglé.

Caractère réel des matrices : 1 pt

La démonstration complète de la bi-implication ci-dessus peut être menée en scindant le problème en deux implications distinctes à démontrer, à savoir

(a) B est orthogonale $\Rightarrow$ A est symétrique et $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$;

(b) A est symétrique et $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ B est orthogonale.

(a) Commençons par démontrer que, si B est orthogonale, A est symétrique et telle que $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$.

Si la matrice B est orthogonale, on a $\mathsf{B}^T\mathsf{B} = \mathbb{I}$, soit, en exploitant l'expression

Connaissance du concept de matrice orthogonale (ici ou ailleurs) : 1 pt du produit $\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}$ écrit plus haut,

$$\begin{pmatrix} 2\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} & -\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} \\ -\mathsf{A}\mathsf{A}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} & \mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Par identification des blocs correspondants, il vient

$$2\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathbb{I} \qquad (\spadesuit)$$
$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} \qquad (\diamondsuit)$$
$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A} \qquad (\heartsuit)$$
$$\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathbb{I} \qquad (\clubsuit)$$

A non singulière (ou inversible) : 2 pts dont 1 pt pour la justification

La condition ($\spadesuit$) indique que la matrice A est necessairement non singuliere puisque, prenant le determinant des deux membres, on obtient (si A est d'ordre n)

$$2^n(\det \mathsf{A})^2 = \det \mathbb{I} = 1 \neq 0$$

Démonstration : 2 pts

La matrice A étant inversible, par multiplication à droite de ($\heartsuit$) par A^{-1}, il vient

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} \qquad \text{soit} \qquad \mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}$$

La matrice A doit donc être symétrique. Sous cette condition, la relation ($\diamondsuit$) est vérifiée et les relations ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) conduisent à la seule contrainte

A est symétrique : 1 pt
$2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$: 1 pt

$$2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$$

Remarquons que la condition $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$ ne peut être simplifiée en $\mathsf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I}$. En effet, par exemple, la matrice

En cas de réponse $\mathsf{A} = \mathbb{I}/\sqrt{2}$: -1 pt

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est telle que $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$ sans que $\mathsf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I}$.

(b) Dans un second temps, démontrons que si A est symétrique et telle que $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$, alors B est orthogonale.
La matrice A est symétrique si elle est égale à sa transposée, *i.e.* $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}$. Sous cette hypothèse, le produit $\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}$ s'écrit

Démonstration : 2 pts

$$\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} & -\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} \\ -\mathsf{A}\mathsf{A}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} & \mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T}+\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathsf{A}\mathsf{A} & 0 \\ 0 & 2\mathsf{A}\mathsf{A} \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse supplémentaire $2\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathbb{I}$, on trouve bien que

Total ii. : 10 pts

$$\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

ce qui démontre l'implication (b).

TOTAL QIII : 20 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i. Il est important d'utiliser des notations correctes pour être compris. En particulier, les matrices sont notées avec des parenthèses alors que le déterminant d'une matrice est noté avec des barres verticales.

ii.
- Le facteur $1/\sqrt{3}$ intervenant dans l'expression de la matrice F_3 conduit à un facteur $(1/\sqrt{3})^3$ (et non $1/\sqrt{3}$) dans l'expression du déterminant correspondant puisque, de façon générale,

$$\det(\lambda\mathsf{A}) = \lambda^n \det\mathsf{A}$$

  où n désigne l'ordre de la matrice A (ici $n = 3$).
- De même, quand une rangée est multipliée par un nombre pour faciliter le calcul du déterminant, il ne faut pas oublier que le déterminant calculé est aussi multiplié par ce nombre et qu'il est donc nécessaire d'effectuer l'opération inverse pour obtenir la valeur correcte du déterminant.
- Même s'il n'était pas indispensable d'exprimer les éléments de la matrice sous forme algébrique à l'item i., il était par contre nécessaire de simplifier au maximum la valeur du déterminant. Cette simplification demandait d'exprimer celui-ci sous forme algébrique plutôt que trigonométrique.

iii.
- Une matrice unitaire est une matrice dont l'inverse est égale à l'adjointe, soit

$$\mathsf{F}_3^{-1} = \mathsf{F}_3^{*} = \overline{\mathsf{F}}_3^{\,\mathrm{T}}$$

  C'est donc cette relation qu'il fallait vérifier. Ceci pouvait être réalisé soit en calculant explicitement F_3^{-1} et F_3^{*}, soit en prouvant que $\mathsf{F}_3\mathsf{F}_3^{*} = \mathbb{I}_3$. La seconde approche est généralement plus simple que la première.
- On sait que le module du déterminant d'une matrice unitaire vaut 1. Cette propriété pouvait être utilisée pour apporter une vérification du calcul du déterminant calculé au point ii.

  Par contre, on ne peut affirmer qu'une matrice est unitaire sur base du seul fait que le module de son déterminant est égal à 1. Cette condition est nécessaire pour que la matrice soit unitaire mais n'est pas suffisante.

Question II

- Quand un énoncé contient un paramètre, la discussion éventuelle ne doit pas être menée arbitrairement en choisissant des valeurs du paramètre qui simplifient le problème posé. Ce n'est que quand une opération ne peut être réalisée pour certaines valeurs du paramètre qu'il faut commencer à discuter, par exemple quand ce paramètre annule une expression par laquelle on divise une ligne de la matrice. Il faut alors traiter séparément le cas où le paramètre ne pose aucun problème et les cas particuliers correspondant aux valeurs du paramètre exclues initialement.
- La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées. Puisqu'il est aussi demandé d'identifier les relations linéaires entre les colonnes de la matrice, il faut privilégier les opérations sur les lignes par rapport

à la manipulation des colonnes. Si des opérations élémentaires sont effectuées uniquement sur les lignes de la matrice, les relations linéaires entre les colonnes sont conservées. Si, par contre, des opérations élémentaires sont effectuées sur les colonnes, les relations linéaires entre celles-ci ne sont pas conservées.

- Pour échelonner une matrice, il faut procéder avec ordre et méthode. Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des lignes ou des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.
- Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

  ne sont pas licites ; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.
- Le rang d'une matrice est aussi égal à l'ordre de la plus grande matrice non singulière que l'on peut extraire de la matrice de départ, éventuellement après des opérations élémentaires sur les rangées de la matrice. Il faut être attentif au fait que, par exemple, pour pouvoir affirmer que le rang de la matrice est égal à 2, il faut avoir vérifié que toutes les sous-matrices d'ordre 3 que l'on peut extraire de la matrice de départ — qui sont au nombre de quatre dans le cas qui nous occupe — sont singulières.
- Le nombre de relations linéaires entre les colonnes de la matrice est égal au nombre de ses colonnes diminué du rang de la matrice. Ici, si $\gamma \neq 2$, le rang de la matrice étant égal à 3, il y a une seule relation linéaire entre les 4 colonnes de la matrice. Pour $\gamma = 2$, le rang de la matrice est égal à 2 et il y a donc 2 relations linéaires entre les 4 colonnes de la matrice.
- Puisque le rang d'une matrice est à la fois égal au nombre de lignes et de colonnes linéairement indépendantes, la matrice de cet exercice ne comportant que 3 lignes ne peut comporter au maximum que 3 colonnes linéairement indépendantes. Il y a donc toujours, quelle que soit la valeur de γ, au moins une relation linéaire entre les 4 colonnes.
- Quand l'échelonnage de la matrice requiert un échange de deux colonnes, il faut en tenir compte quand on exprime les relations linéaires entre les colonnes. Par exemple, dans le cas $\gamma = 2$, les colonnes 2 et 3 ont été échangées dans la solution type. Les

relations observées sur la forme normale échelonnée doivent donc être interprétées en conséquence.

- Les matrices successives obtenues suite aux opérations élémentaires effectuées ne sont pas égales entre elles, même si certaines propriétés (comme le rang) de ces matrices sont conservées. On ne peut donc écrire un symbole d'égalité entre ces matrices successives.

Question III

i.
- La matrice A est réelle. La matrice B l'est donc aussi et est normale si elle commute avec sa transposée.
- Lorsqu'on transpose une matrice définie par blocs, il faut non seulement permuter les blocs qui se correspondent de part et d'autre de la diagonale principale mais également transposer séparément chacun des blocs pour faire en sorte que, conformément à la définition de la transposée, les lignes de la matrice initiale deviennent les colonnes de la matrice transposée. La transposée de la matrice B est donc

$$\mathsf{B}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & -\mathsf{A}^{\mathsf{T}} \\ \mathsf{A} & \mathsf{A} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^{\mathsf{T}} & \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \\ (-\mathsf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} & \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^{\mathsf{T}} & \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \\ -\mathsf{A} & \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$$

  et non pas

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ -\mathsf{A}^{\mathsf{T}} & \mathsf{A} \end{pmatrix}$$

- On demandait de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes. La conclusion attendue devait donc être exprimée au moyen d'un "si et seulement si".

ii.
- Une matrice est orthogonale si elle est réelle et que son inverse est égale à sa transposée. De même, une matrice est symétrique si elle est réelle et égale à sa transposée. Le caractère réel des matrices devait donc être envisagé. Ceci se faisait facilement puisque, B étant construite au moyen de A, elle est réelle ssi A est elle-même réelle.
- La démonstration rigoureuse et systématique d'une double implication peut être menée en réalisant successivement la démonstration de chacune des implications. Ceci facilite l'identification, dans chacun des cas, des hypothèses et de la thèse à prendre en compte. On devait donc démontrer successivement
  (a) B est orthogonale $\quad\Rightarrow\quad$ A est symétrique et $2\mathsf{AA} = \mathbb{I}$;
  (b) A est symétrique et $2\mathsf{AA} = \mathbb{I}$ $\quad\Rightarrow\quad$ B est orthogonale.
- La relation $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \mathsf{AA}$ apparaissant dans la condition d'orthogonalité de B ne peut se traduire par $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}$ en 'simplifiant par A'. Pour justifier ce résultat, il est indispensable de faire intervenir la matrice A^{-1} et de post-multiplier chacun des termes de l'égalité, soit

$$\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \mathsf{AA} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{AAA}^{-1} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}$$

  Pour pouvoir faire appel à A^{-1} il faut commencer par démontrer la non-singularité de A.
- On ne rappellera jamais assez que les matrices ne se manipulent pas comme des nombres. On notera en particulier qu'on ne peut pas diviser ou simplifier par une matrice.