LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2025

MATH0013 - ALGÈBRE

ÉVALUATION FORMATIVE

- *Indiquez lisiblement votre nom et votre prénom en MAJUSCULES ainsi que votre matricule (format 2025...) aux emplacements prévus.*
- *Rédigez vos réponses aux questions dans les emplacements vides prévus à cet effet sur l'énoncé. Si vous manquez de place, terminez votre réponse sur une ou plusieurs pages que vous ajouterez* ***à la fin*** *du questionnaire. À l'endroit prévu, indiquez clairement en majuscules et dans un cadre que votre réponse continue sur une page supplémentaire. Sur cette page complémentaire indiquez le numéro de la question à laquelle se rapporte votre réponse.*
- *À l'endroit prévu sur la première page du document, indiquez que vous avez réalisé l'évaluation formative sans recourir à des outils d'intelligence artificielle générative. Seules les copies portant cet engagement seront corrigées.*
- *Soumettez vos copies (toutes les pages, dans l'ordre, même celles sur lesquelles vous n'auriez pas écrit) via Gradescope (www.gradescope.com) au plus tard pour* ***le 12 novembre à 8h00****.*

Question I

Montrez que l'application

$$\forall \mathsf{A},\ \mathsf{B} \in \mathbb{C}_n^m\ :\ (\mathsf{A},\mathsf{B}) \mapsto (\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \mathrm{trace}\,(\mathsf{B}^*\mathsf{A})$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n^m$, c'est-à-dire que la forme trace $(\mathsf{B}^*\mathsf{A})$ est hermitienne, sesquilinéaire et définie positive.

Question II

Soit une base orthonormée $\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_3,\ \mathbf{E}_4$ d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ et $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs de $\mathtt{E}$ tels que

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{b} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 \end{cases}$$

i. Déterminez la dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.
ii. Déterminez une base orthonormée de $\mathtt{F}$.

Question III

Démontrez que, quels que soient les vecteurs géométriques $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$, on a

$$(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\cdot\Big((\mathbf{y}\wedge\mathbf{z})\wedge(\mathbf{z}\wedge\mathbf{x})\Big) = \Big(\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\wedge\mathbf{z})\Big)^2$$

Question I

Vérifions que l'application $(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ qui à A et B appartenant à $\mathbb{C}_n^m$ associe $\operatorname{trace}(\mathsf{B}^*\mathsf{A})$ possède les trois propriétés d'un produit scalaire, c'est-à-dire est une forme hermitienne, sesquilinéaire et définie positive.

Notons tout d'abord que si A et B sont des matrices complexes de dimensions $(m \times n)$, alors le produit $\mathsf{B}^*\mathsf{A}$ est possible et produit une matrice carrée d'ordre n, de sorte que la trace est parfaitement définie.

Vérification de la compatibilité des tailles : 1 pt

- La forme est hermitienne.

  Notons d'abord que, pour toute matrice C carrée, $\operatorname{trace}(\mathsf{C}^*) = \overline{\operatorname{trace}\mathsf{C}}$.

  En effet, d'une part, $\operatorname{trace}(\mathsf{C}^*) = \operatorname{trace}(\overline{\mathsf{C}}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{trace}(\overline{\mathsf{C}})$ puisque seuls les éléments diagonaux de la matrice, qui ne sont pas affectés par la transposition, interviennent dans la trace. D'autre part, $\operatorname{trace}(\overline{\mathsf{C}}) = \overline{\operatorname{trace}\mathsf{C}}$ puisque le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués.

  Dès lors, on obtient successivement

  $$(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \operatorname{trace}(\mathsf{B}^*\mathsf{A}) = \operatorname{trace}[(\mathsf{A}^*\mathsf{B})^*] = \overline{\operatorname{trace}(\mathsf{A}^*\mathsf{B})} = \overline{(\mathsf{B}|\mathsf{A})}$$

  ce qui établit le fait que la forme hermitienne.

  Connaissance de la notion de forme hermitienne : 1 pt

  Démonstration : 2 pts

- Elle est sesquilinéaire.

  La trace d'une combinaison linéaire de matrices est égale à la combinaison linéaire correspondante des traces des matrices. On a donc

  $$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\mathsf{A}_k \Big| \sum_{l=1}^{q}\mu_l\mathsf{B}_l\right) &= \operatorname{trace}\left[\left(\sum_{l=1}^{q}\mu_l\mathsf{B}_l\right)^*\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\mathsf{A}_k\right)\right] \\ &= \operatorname{trace}\left[\left(\sum_{l=1}^{q}\overline{\mu}_l\mathsf{B}_l^*\right)\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\mathsf{A}_k\right)\right] \\ &= \operatorname{trace}\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}\lambda_k\overline{\mu}_l\,(\mathsf{B}_l^*\mathsf{A}_k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}\lambda_k\overline{\mu}_l\operatorname{trace}(\mathsf{B}_l^*\mathsf{A}_k) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}\lambda_k\overline{\mu}_l\,(\mathsf{A}_k|\mathsf{B}_l)\end{aligned}$$

  ce qui établit la sesquilinéarité.

  Connaissance de la notion de forme sesquilinéaire : 1 pt

  Démonstration : 2 pts (dont 1 pt pour la gestion des complexes conjugués)

- Enfin, elle définie positive puisque

  $$\begin{aligned}(\mathsf{A}|\mathsf{A}) = \operatorname{trace}(\mathsf{A}^*\mathsf{A}) &= \sum_{i=1}^{n}(\mathsf{A}^*\mathsf{A})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\mathsf{A}^*)_{ik}a_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\overline{a_{ki}}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|a_{ki}|^2 \geq 0\end{aligned}$$

  où l'égalité a lieu si et seulement si tous les a_{ki} sont nuls, *i.e.* si et seulement si la matrice A est nulle.

  Connaissance de la notion de forme définie positive : 1 pt

  Démonstration : 2 pts (dont 0.5 pt pour la référence à $\mathsf{A} = 0$)

En conclusion, l'application $(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ qui à A et B appartenant à $\mathbb{C}_n^m$ associe $\operatorname{trace}(\mathsf{B}^*\mathsf{A})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n^m$.

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. La dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par **a** et **b** est égale au nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi ces deux vecteurs. Ce nombre est lui-même égal au rang de la matrice dont les colonnes sont formées des composantes

Dimension = nombre de vecteurs linéairement indépendants : 1 pt

$$\mathsf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des vecteurs dans la base orthonormée $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$, soit

dim $\mathtt{F}$=2 : 1 pt
Justification par calcul du rang de A ou par application de la définition de l'indépendance linéaire : 2 pts

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rang de A vaut 2 puisqu'elle ne comporte que 2 colonnes et que l'on peut en extraire une matrice d'ordre 2 non singulière, par exemple la matrice

$$\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formée des deux dernières lignes de A.

Total i. : 4 pts

ii. Pour déterminer une base orthonormée de $\mathtt{F}$, appliquons le lemme d'orthonormation de Gram-Schmidt aux vecteurs linéairement indépendants **a** et **b**.
La norme du vecteur **a** étant donnée par

Méthode (Gram-Schmidt) : 1 pt

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}|\mathbf{a})} = \sqrt{3}$$

on construit aisément le vecteur normé

$$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)$$

Les composantes de ce vecteur dans la base constituée des vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ et $\mathbf{E}_4$ peuvent s'écrire sous la forme matricielle

Premier vecteur de base (composantes ou expression vectorielle) : 2 pts

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poursuivant le processus d'orthonormation de Gram-Schmidt, on construit ensuite le vecteur normé

$$\mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{b} - (\mathbf{b}|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{b} - (\mathbf{b}|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1\|}$$

Comme

$$(\mathbf{b}|\mathbf{z}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

les composantes du vecteur $\mathbf{b} - (\mathbf{b}|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1$ dans la base $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-4\\3\end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur vaut

$$\frac{1}{3}\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2+3^2} = \frac{1}{3}\sqrt{33}$$

Deuxième vecteur de base (composantes ou expression vectorielle) : 3 pts

On a donc

$$\mathrm{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix}2\\2\\-4\\3\end{pmatrix}$$

ou encore, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{33}}(2\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 - 4\mathbf{E}_3 + 3\mathbf{E}_4)$$

En conclusion, les vecteurs

Base correcte exprimée vectoriellement : 2 pts

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{33}}(2\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 - 4\mathbf{E}_3 + 3\mathbf{E}_4)$$

constituent une base orthonormée de $\mathtt{F}$.

Total ii. : 8 pts

TOTAL QII : 12 PTS

Question III

Par application de la formule du double produit vectoriel

Connaissance de la formule du double produit vectoriel : 1 pt

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

avec $\mathbf{a} = \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{z}$ et $\mathbf{c} = (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})$, on a

$\mathbf{z} \perp (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})$ ou autre application de ce principe : 1 pt

$$\begin{aligned}(\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) &= \mathbf{z}\Big(\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})\Big) - \mathbf{y}\Big(\mathbf{z} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})\Big) \\ &= \mathbf{z}\Big(\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})\Big)\end{aligned}$$

où on a tenu compte de l'orthogonalité de $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}$.

Dès lors, il vient

Permutation circulaire du produit mixte : 1 pt

Démonstration : 2 pts

Notations correctes : vecteurs soulignés, utilisation correcte du point, ... : 1 pt

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \Big((\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})\Big) &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}\Big(\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})\Big) \\ &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}\,[\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x}] = [\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}][\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x}] \\ &= [\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}][\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}] = [\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]^2 = \Big(\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})\Big)^2\end{aligned}$$

vu la propriété de permutation circulaire du produit mixte.

TOTAL QIII : 6 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Le produit scalaire entre matrices fait l'objet ici d'une définition propre au moyen de la trace. Les propriétés connues du produit scalaire entre vecteurs ne sont pas automatiquement transposables à ce produit scalaire entre matrices. Plus précisément, l'objet même de la question est de démontrer que $\operatorname{trace}(\mathsf{B}^*\mathsf{A})$ permet de définir une opération qui possède toutes les propriétés normales d'un produit scalaire.
- Quand on forme un produit matriciel, il faut préalablement vérifier que les tailles des matrices sont compatibles. Ici, A et B sont des matrices complexes de dimensions $(m \times n)$ de sorte que le produit $\mathsf{B}^*\mathsf{A}$ est possible et produit une matrice carrée d'ordre n. La trace est donc parfaitement définie.
- Pour démontrer une propriété matricielle, il est parfois indispensable d'exprimer les expressions matricielles en fonction des éléments des matrices, par exemple ici pour démontrer le caractère défini positif. Il est également possible dans certains cas de démontrer la propriété sans exprimer les éléments des matrices en jeu, par exemple ici pour le caractère hermitien et la sesquilinéarité.
- L'expression de la trace d'un produit matriciel doit comprendre deux sommes. La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments diagonaux de cette matrice et chaque élément diagonal s'exprime lui-même au moyen d'une somme en vertu de la définition du produit matriciel. Considérant par exemple les 3 matrices d'ordre n, A, B et C telles que $\mathsf{C} = \mathsf{AB}$, on a

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

  de sorte que les éléments diagonaux de C s'écrivent

  $$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

  et que

  $$\operatorname{trace} \mathsf{C} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

Question II

i.
- Une réponse complète et bien formulée devait commencer par faire le lien entre la dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par les vecteurs donnés et le nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi ceux-ci.
- Il ne suffisait pas d'affirmer que les deux vecteurs donnés étaient linéairement indépendants. Il fallait le justifier, soit en calculant le rang de la matrice formée en mettant en colonnes les composantes des deux vecteurs dans la base des $\mathbf{E}_i$, soit en appliquant la définition de l'indépendance linéaire.

ii.
- Il est impératif de respecter les notations et de ne pas confondre les vecteurs et leur représentation matricielle dans une base donnée.

Les vecteurs sont indiqués en gras dans les textes imprimés et sont soulignés dans les textes manuscrits. Les matrices (colonnes) ne sont pas soulignées. Autant que possible, on essayera d'utiliser des notations permettant de distinguer les matrices des vecteurs. Dans un texte manuscrit, on écrira donc

$$\underline{z}_1 = \frac{\underline{x}_1}{\|\underline{x}_1\|} = \frac{\underline{x}_1}{\sqrt{(\underline{x}_1|\underline{x}_1)}}$$

quand on veut désigner des vecteurs et

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\|\mathsf{x}_1\|} = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1}}$$

pour désigner des matrices et des opérations matricielles.
Il convenait donc par exemple d'écrire

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et pas} \quad \underline{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Dans $\mathbb{R}^3$, ensemble des matrices-colonnes à 3 composantes réelles, le produit scalaire de x et z s'écrit et se calcule en formant $\mathsf{z}^*\mathsf{x} = \mathsf{z}^\mathrm{T}\mathsf{x}$. Par contre, on ne peut utiliser la notation $\underline{z}^*\underline{x}$, ni $\underline{z}^\mathrm{T}\underline{x}$, pour exprimer le produit scalaire des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{z}$. Dans ce contexte vectoriel, on doit écrire $(\underline{x}\,|\underline{z})$. Rappelons que l'écriture $\underline{x}\cdot\underline{z}$ est réservée au produit scalaire de vecteurs géométriques.

- Les éléments de F sont des vecteurs. La base orthonormée de F recherchée était constituée de deux vecteurs qui devaient être exprimés en fonction des vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ et $\mathbf{E}_4$. Il ne fallait pas se contenter de donner les composantes des vecteurs de base.
- Les erreurs de calcul dans ce type d'exercice peuvent être facilement détectées en vérifiant que les vecteurs de base obtenus sont bien unitaires et orthogonaux deux à deux.

Question III

Le respect des notations introduites dans le cours est important. La précision dans les notations est un élément essentiel pour permettre de distinguer aisément la nature scalaire ou vectorielle des opérandes et d'appliquer ainsi les règles et propriétés appropriées.

D'une part, le produit scalaire entre des vecteurs de l'espace physique doit être noté avec un point entre les deux vecteurs. Le point ne doit par contre pas être utilisé pour noter un produit entre deux grandeurs scalaires ou entre un scalaire et un vecteur. On écrira par exemple $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ et $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

D'autre part, tous les vecteurs doivent être soulignés dans les textes manuscrits et notés en caractères gras dans les textes imprimés. Les grandeurs scalaires ne doivent pas être soulignées.