Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2024

MATH0013 - ALGÈBRE

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

i. Soient les vecteurs géométriques $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base orthonormée de l'espace physique $\mathcal{E}$. Vérifiez en calculant explicitement tous les produits la relation

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \big[(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\big] = \big[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\big]^2$$

ii. Démontrez cette relation dans le cas général où $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont des vecteurs quelconques de $\mathcal{E}$.

Question II

Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ $(n \geq 2)$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$. Étudiez, en fonction du paramètre n, l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ..., $\mathbf{w}_n$ définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_k &= \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}, \qquad k \in \{2, 3, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Question III

Soit une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = i\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_2 = i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_3 = (1+i)\mathbf{e}_2 + 2i\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

i. Déterminez la dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$.

ii. Déterminez une base orthonormée de $\mathtt{F}$ et exprimez les vecteurs de cette base en fonction des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$.

Question I

i. Soit $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base orthonormée de l'espace physique $\mathcal{E}$ et la relation

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\big[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\big] = \big[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\big]^2$$

On calcule successivement

0.5 pt par résultat correct

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = (2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\wedge\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} = \mathbf{e}_2\wedge(3\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{c}\wedge\mathbf{a} = (3\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\wedge(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = -6\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$$

$$(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) = -\mathbf{e}_1\wedge(-6\mathbf{e}_3-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1) = -6\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\big[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\big] = 2\mathbf{e}_3\cdot(-6\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3) = 4$$

$$\big[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\big]^2 = \big[(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\cdot(-\mathbf{e}_1)\big]^2 = (-2)^2 = 4$$

de sorte que la relation donnée est bien vérifiée.

Total i. : 3 pts

ii. Par application de la formule du double produit vectoriel

Connaissance de la formule du double produit vectoriel : 1 pt

$$(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\wedge\mathbf{z} = \mathbf{y}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) - \mathbf{x}(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})$$

avec $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \mathbf{c}$ et $\mathbf{z} = (\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})$, on a

$\mathbf{c}\perp(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})$ *: 1 pt*

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) &= \mathbf{c}\Big[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\Big] - \mathbf{b}\Big[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\Big]\\ &= \mathbf{c}\Big[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\Big]\end{aligned}$$

où on a tenu compte de l'orthogonalité de $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}$.
Dès lors, il vient

Invariance du produit mixte en cas de permutation circulaire : 1 pt

Démonstration : 2 pts

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})] &= (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\Big(\mathbf{c}\Big[\mathbf{b}\cdot[\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}]\Big]\Big)\\ &= (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}][\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]\\ &= [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}][\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^2 = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})]^2\end{aligned}$$

vu l'invariance du produit mixte en cas de permutation circulaire.

Total ii. : 5 pts

TOTAL QI : 8 PTS

Question II

Construisons une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, soit

Concepts de vecteurs linéairement indépendants/dépendants : 2 pts

$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathbf{w}_{n-1} + \lambda_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$$

c'est-à-dire, en introduisant l'expression des vecteurs $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ en fonction des vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$,

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_n) + \lambda_2(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1) + \ldots + \lambda_{n-1}(\mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{v}_{n-2}) + \lambda_n(\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_{n-1}) = \mathbf{0}$$

ou encore

$$(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{v}_1+(\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{v}_2+\ldots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)\mathbf{v}_{n-1}+(\lambda_1+\lambda_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$$

Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ étant linéairement indépendants, ceci n'est possible que si

Démonstration : 2 pts

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \vdots\\ \lambda_{n-1}+\lambda_n=0\\ \lambda_1+\lambda_n=0\end{cases}\qquad(\heartsuit)$$

c'est-à-dire si

$$\lambda_1=-\lambda_2=\lambda_3=\ldots=(-1)^{n-1}\lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_1=-\lambda_n$$

Conclusion correcte si elle a été correctement justifiée : 2 pts

Si n est impair, la vérification simultanée de $\lambda_1=\lambda_n$ et $\lambda_1=-\lambda_n$ n'est possible que si $\lambda_1=\lambda_n=0$, de sorte que $\lambda_k=0$, $k\in\{1,\ldots,n\}$. Dans ce cas, les vecteurs $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ sont linéairement indépendants.

Si n est pair, on peut trouver un ensemble de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls vérifiant ($\heartsuit$), par exemple en choisissant $\lambda_k=(-1)^k$, $k\in\{1,\ldots,n\}$. Ceci montre que les vecteurs $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ sont linéairement dépendants si n est pair.

TOTAL QII : 6 PTS

Question III

i. La dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ est égal au nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi ces trois vecteurs. Ce nombre est lui-même égal au rang de la matrice dont les colonnes sont formées des composantes

Dimension = nombre de vecteurs linéairement indépendants : 1 pt

$$\mathrm{x}_1=\begin{pmatrix}i\\ i\\ -2\end{pmatrix}\qquad \mathrm{x}_2=\begin{pmatrix}i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{x}_3=\begin{pmatrix}0\\ 1+i\\ 2i\end{pmatrix}$$

des vecteurs dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. Ce calcul peut être mené en amenant la matrice à une forme normale échelonnée par une suite d'opérations élémentaires portant sur les lignes. Il vient successivement

dim $\mathtt{F}$ *= rang de la matrice : 1 pt*

Principe de calcul du rang, soit en réduisant la matrice à une forme normale échelonnée, soit en montrant que le déterminant est nul et qu'une matrice d'ordre 2 non singulière peut être extraite de la matrice :1 pt

$$\begin{pmatrix}i & i & 0\\ i & 1 & 1+i\\ -2 & 0 & 2i\end{pmatrix} \ \ell_1\leftrightarrow-\ell_3/2\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -i\\ i & 1 & 1+i\\ i & i & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\ell_2\to\ell_2-i\ell_1\\ \ell_3\to\ell_3-i\,\ell_1\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -i\\ 0 & 1 & i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix}$$

$$\ell_3\to\ell_3-i\ell_2\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -i\\ 0 & 1 & i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Pénalité de 1 pt si égalité entre les matrices lors de l'échelonnage

Le rang de la matrice est égal à 2. Parmi les combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$, on ne peut donc trouver au maximum que deux vecteurs linéairement indépendants, ce qui signifie que la dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ est égale à 2.

Dimension de $\mathtt{F}$ *= 2 : 2 pts*

Total i. : 5 pts

ii. Appliquons la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de $\mathtt{F}$.

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

Principe = orthonormation : 1 pt

Norme du premier vecteur : 1 pt

$$\overline{\mathsf{x}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix}-i & -i & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ i \\ -2\end{pmatrix} = 1+1+4 = 6$$

Premier vecteur : 1 pt

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\overline{\mathsf{x}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ i \\ -2\end{pmatrix}$$

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

Deuxième vecteur = 3 pts (dont 1 pt pour la norme)

$$\begin{aligned}
\mathsf{y}_2 &= \mathsf{x}_2 - (\overline{\mathsf{z}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_2)\mathsf{z}_1 \\
&= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-i & -i & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ i \\ -2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} - \frac{1-i}{6}\begin{pmatrix} i \\ i \\ -2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6i-(1+i) \\ 6-(1+i) \\ 2-2i\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+5i \\ 5-i \\ 2-2i\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On norme y_2 pour trouver le second vecteur de base, c'est-à-dire

$$\overline{\mathsf{y}_2}^{\mathrm{T}}\mathsf{y}_2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}-1-5i & 5+i & 2+2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+5i \\ 5-i \\ 2-2i\end{pmatrix} = \frac{1}{36}(1+25+25+1+4+4) = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$$

$$\mathsf{z}_2 = \frac{\mathsf{y}_2}{\sqrt{\overline{\mathsf{y}_2}^{\mathrm{T}}\mathsf{y}_2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+5i \\ 5-i \\ 2-2i\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1+5i \\ 5-i \\ 2-2i\end{pmatrix}$$

Comme montré en i., le troisième vecteur est linéairement dépendant des deux premiers. La procédure d'orthonormation ne doit donc pas être poursuivie. Le sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ étant de dimension 2, les deux vecteurs $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ définis par

Justification du fait que la base ne comporte que deux éléments :1 pt

Écriture vectorielle des vecteurs de base : 2 pts, accordés si cohérent avec les composantes déterminées, même fausses

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[i\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3\right] \\ \mathbf{z}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}\left[(-1+5i)\mathbf{e}_1 + (5-i)\mathbf{e}_2 + (2-2i)\mathbf{e}_3\right] \end{cases}$$

suffisent pour en former une base orthonormée.

Pénalité de 2 pts si un troisième vecteur de base est donné, que celui-ci soit nul ou faux

Pas de pénalité si un troisième vecteur est calculé si celui-ci est nul et n'est pas considéré comme vecteur de base

Total ii. : 9 pts

TOTAL QIII : 14 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

Le respect des notations introduites dans le cours est important. La précision dans les notations est un élément essentiel pour permettre de distinguer aisément la nature scalaire ou vectorielle des opérandes et d'appliquer ainsi les règles et propriétés appropriées.

D'une part, le produit scalaire entre des vecteurs de l'espace physique doit être noté avec un point entre les deux vecteurs. Le point ne doit par contre pas être utilisé pour noter un produit entre deux grandeurs scalaires ou entre un scalaire et un vecteur. On écrira par exemple $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ et $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

D'autre part, tous les vecteurs doivent être soulignés dans les textes manuscrits et notés en caractères gras dans les textes imprimés. Les grandeurs scalaires ne doivent pas être soulignées.

i. Si le repère orthonormé $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dans lequel on travaille est orienté en sens direct, le produit vectoriel de deux vecteurs de base est égal au troisième vecteur si les deux vecteurs se suivent dans un ordre correspondant à une permutation circulaire de 1-2-3 (soit 1-2-3, 2-3-1 ou 3-1-2) et à l'opposé du troisième vecteur s'ils se suivent dans un ordre correspondant à une permutation circulaire de 3-2-1 (soit 3-2-1, 2-1-3 ou 1-3-2). On a ainsi, par exemple,

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$$

Cette règle simple permet de calculer aisément les produits vectoriels sans devoir mettre en oeuvre un raisonnement s'appuyant sur une représentation géométrique des vecteurs et la règle de la main droite.

ii. On rappellera que le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur perpendiculaire à ceux-ci : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est perpendiculaire à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Question II

- Le respect des notations est indispensable. Tous les vecteurs doivent être soulignés, y compris le vecteur nul. Par ailleurs, quand on écrit n vecteurs, ou une somme de n termes, sans connaitre la valeur de n, il faut utiliser '$\ldots$' pour remplacer les vecteurs ou termes sous-entendus par l'écriture. On écrira donc, par exemple, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_n$ et $\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{w}_n$.
- Un exemple ne constitue jamais une démonstration du cas général. Les réponses dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ ne pouvaient pas être généralisées à tous les n pairs ou impairs sans démonstration.
- La définition de l'indépendance linéaire doit être écrite correctement, sans oublier l'implication sur les coefficients $\lambda_i, (i \in \{1, \ldots, n\})$.

  Les vecteurs $\mathbf{w}_1$, …, $\mathbf{w}_n$ sont linéairement indépendants lorsque

$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

  Ils sont par contre linéairement dépendants si on peut trouver un ensemble de coefficients $\lambda_i, (i \in \{1, \ldots, n\})$ non tous nuls qui permettent d'annuler la combinaison linéaire des $\mathbf{w}_i$.

- Il ne suffit pas d'affirmer qu'un tel ensemble de coefficients $\lambda_i, (i \in \{1, \ldots, n\})$ non tous nuls existe. Il faut le prouver, la meilleure façon de faire étant de donner les valeurs de tels coefficients. Ici, dans le cas où n est pair, les coefficients $\lambda_i = (-1)^i, (i \in \{1, \ldots, n\})$ permettent d'annuler la combinaison linéaire des $\mathbf{w}_i$.

Question III

i.
- Afin de déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$, il faut déterminer le nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi ces trois vecteurs. Ce nombre étant lui-même égal au rang de la matrice dont les colonnes sont formées des composantes des 3 vecteurs, l'échelonnage de cette matrice permet de répondre à la question posée.
- Les matrices successives obtenues suite aux opérations élémentaires effectuées ne sont pas égales entre elles, même si certaines propriétés (comme le rang) de ces matrices sont conservées. On ne peut donc écrire un symbole d'égalité entre ces matrices.
- On pouvait aussi remarquer que $\mathbf{x}_3 = -i\mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$. Cette relation linéaire entre les trois vecteurs ne permet cependant pas d'affirmer que la dimension de $\mathtt{F}$ est égale à 2. Elle indique seulement que la dimension est au maximum égale à 2. Il reste à prouver que $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont linéairement indépendants.

ii.
- Dans une base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$ peut être calculé en faisant appel aux composantes x et z de ces deux vecteurs par

$$(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \mathsf{z}^*\mathsf{x} = \bar{\mathsf{z}}^T\mathsf{x}$$

  Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel complexe, il ne faut par oublier de conjuguer les composantes du deuxième vecteur lors de l'évaluation du produit scalaire.
- De même, la norme d'un vecteur se calcule suivant

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathsf{x}^*\mathsf{x} = \bar{\mathsf{x}}^T\mathsf{x}$$

  De façon alternative à la formulation matricielle $\mathsf{x}^*\mathsf{x}$, on peut calculer la norme en prenant la racine carrée de la somme des carrés des *modules* des composantes. Par exemple ici,

$$\|\mathsf{x}_1\| = \sqrt{|i|^2 + |i|^2 + |-2|^2} = \sqrt{6}$$

  Dans un espace vectoriel complexe, on veillera à ne pas oublier de travailler avec les modules des composantes. Un tel oubli conduirait ici au résultat incorrect

$$\|\mathsf{x}_1\| = \sqrt{i^2 + i^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}$$

- Comme montré au point i., la dimension de $\mathtt{F}$ est égale à 2. La base orthonormée recherchée ne comporte donc que deux vecteurs qui sont obtenus en appliquant la procédure de Gram-Schmidt à x_1 et x_2. Si la procédure de Gram-Schmidt avait été poursuivie et appliquée à x_3, elle aurait conduit à $\mathsf{z}_3 = 0$ auquel on ne peut associer un vecteur unitaire et qui ne doit pas être pris en compte dans la construction de la base recherchée. Les vecteurs $\{\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2, 0\}$ ne constituent pas une base de l'enveloppe linéaire considérée puisqu'ils ne sont pas linéairement indépendants.
- Il était explicitement demandé d'exprimer les vecteurs de base en fonction des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$. Il ne fallait donc pas se contenter de donner les composantes des vecteurs de base.