

*Durée de l'épreuve : 3 heures 30.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

Question I

- i. (a) Déterminez les contraintes sur les dimensions des matrices A et B pour pouvoir former à la fois le produit AB et le produit BA . Quelles sont les dimensions de ces deux produits ?
(b) Montrez que, quelles que soient les tailles des matrices A et B vérifiant les contraintes identifiées en (a), on a $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.
- ii. (a) Définissez le concept d'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ d'un espace vectoriel E .
(b) On considère trois vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension 5. Déterminez la condition sur les paramètres α et β pour que les vecteurs
- $$\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3, \quad \alpha\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \quad \text{et} \quad \beta\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$
- soient linéairement indépendants.
- iii. (a) Quand dit-on d'un ensemble F qu'il constitue un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?
(b) L'ensemble des matrices normales d'ordre n constitue-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$ muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire ? Justifiez.
- iv. (a) Définissez le concept de matrice définie positive.
(b) Si A est symétrique définie positive, peut-on affirmer que A^2 est symétrique définie positive ?

Question II

On considère l'application linéaire $\mathcal{A}$ définie entre des espaces vectoriels réels E et F . Dans les bases orthonormées $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de E et $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ de F , l'application linéaire est représentée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- i. Déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, tous les vecteurs $\mathbf{x} \in E$ tels que
- $$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 4\mathbf{f}_3$$
- ii. Déterminez une base orthonormée de $\ker(\mathcal{A})$ en fonction de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}_4$.
iii. Déterminez le rang de $\mathcal{A}$.

Question III

On représente la conductibilité thermique au sein d'un matériau par le tenseur $\mathbf{K}$. Celui-ci est tel que le flux de chaleur $\mathbf{J}$ (quantité d'énergie traversant une surface donnée par unité de temps et par unité de surface) est lié au gradient de température $\mathbf{g}$ par la loi de Fourier

$$\mathbf{J} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}$$

Matriciellement, on

$$J = -K g$$

où J , K et g désignent les composantes de $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{g}$ dans une même base.

Travaillant dans la base orthonormée particulière $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et effectuant des mesures expérimentales sur un nouveau matériau, on parvient à identifier la plupart des coefficients de la matrice K sous la forme

$$K = k_0 \begin{pmatrix} 4 & \alpha & 2 \\ \alpha & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

où $k_0 > 0$ est une constante connue et où α est un paramètre réel inaccessible à l'expérience.

- i. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles le tenseur $\mathbf{K}$ peut être représenté par une matrice diagonale dans une base appropriée.
- ii. Dans le cas où $\alpha = 0$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, une base orthonormée dans laquelle le tenseur de conductibilité thermique $\mathbf{K}$ est représenté par une matrice diagonale. Donnez l'expression de cette matrice diagonale.
- iii. Selon le second principe de la thermodynamique, on doit avoir

$$-\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{g}}{T^2} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}$$

où T désigne la température absolue. Cette condition est-elle vérifiée dans le cas où $\alpha = 0$? Justifiez.

Question I

- i. (a) Pour former le produit matriciel AB , il faut que le nombre n de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B . Pour former le produit matriciel BA , il faut que le nombre de colonnes m de B soit égal au nombre de lignes de A . On a donc A de dimensions $(m \times n)$ et B de dimensions $(n \times m)$. Sous ces conditions, le produit AB est de dimensions $(m \times m)$ et le produit BA est de dimensions $(n \times n)$.

- (b) Les éléments des matrices carrées AB et BA , respectivement d'ordre m et n , s'écrivent

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad \text{et} \quad (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik}a_{kj}$$

On a donc

$$\text{trace}(AB) = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

et

$$\text{trace}(BA) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ki}b_{ik} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \text{trace}(AB)$$

puisque les indices k et i de l'avant-dernière double somme sont muets et peuvent donc être échangés.

- ii. (a) Des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ sont dits *linéairement indépendants* si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

- (b) Par définition de l'indépendance linéaire, les vecteurs $\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3$, $\alpha\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ et $\beta\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3) + \lambda_2(\alpha\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \lambda_3(\beta\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La relation

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3) + \lambda_2(\alpha\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \lambda_3(\beta\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{0}$$

peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{a}_1(\lambda_1 + \alpha\lambda_2) + \mathbf{a}_2(\lambda_2 + \beta\lambda_3) + \mathbf{a}_3(4\lambda_1 + \lambda_3) = \mathbf{0}$$

Puisque $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$, sont linéairement indépendants, cette relation implique

$$\begin{cases} \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \beta\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire homogène possède la solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4\alpha\beta \neq 0$$

Les vecteurs donnés sont donc linéairement indépendants ssi $1 + 4\alpha\beta \neq 0$.

- iii. (a) L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E

- si F est non vide
- et s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments, c'est-à-dire si

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in F$$

- (b) Vérifions sur base de cette définition si l'ensemble des matrices normales d'ordre n constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$.

L'ensemble est bien non vide puisqu'il contient au moins la matrice nulle $0 \in \mathbb{C}_n^n$ qui est normale puisque

$$00^* = 0 = 0^*0$$

Vérifions maintenant s'il contient bien les combinaisons linéaires de ses éléments. Considérons les matrices normales A et $B \in \mathbb{C}_n^n$ et vérifions si la matrice $\alpha A + \beta B$ est normale pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire si

$$(\alpha A + \beta B)^*(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)(\alpha A + \beta B)^* \quad (\diamond)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)^*(\alpha A + \beta B) &= (\bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*)(\alpha A + \beta B) \\ &= \bar{\alpha}\alpha A^*A + \bar{\alpha}\beta A^*B + \bar{\beta}\alpha B^*A + \bar{\beta}\beta B^*B \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)(\alpha A + \beta B)^* &= (\alpha A + \beta B)(\bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*) \\ &= \alpha\bar{\alpha}AA^* + \beta\bar{\alpha}BA^* + \alpha\bar{\beta}AB^* + \beta\bar{\beta}BB^* \\ &= \alpha\bar{\alpha}A^*A + \beta\bar{\alpha}BA^* + \alpha\bar{\beta}AB^* + \beta\bar{\beta}B^*B \end{aligned}$$

où il a été tenu compte de

$$AA^* = A^*A \quad \text{et} \quad BB^* = B^*B$$

En injectant ces expressions dans $(\diamond)$, on aboutit à la condition

$$\bar{\alpha}\beta(A^*B - BA^*) + \alpha\bar{\beta}(B^*A - AB^*) = 0$$

qui ne peut être rencontrée quels que soient α et β que si

$$A^*B = BA^*$$

Cette condition n'est pas toujours vérifiée comme le montre le contre-exemple constitué des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont, respectivement, symétrique et anti-symétrique, donc normales. On calcule aisément

$$A^*B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^*B$$

En vertu du raisonnement précédent, les combinaisons linéaires de ces deux matrices ne seront donc pas toujours normales. En particulier, la combinaison linéaire

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas normale puisque

$$CC^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

alors que

$$C^*C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices normales d'ordre n ne constitue donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$.

iv. (a) Une matrice est dite *définie positive* lorsque

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

(b) D'une part, si A est symétrique ($A^T = A$), $A^2 = AA$ est aussi symétrique. En effet, on a alors

$$(AA)^T = A^T A^T = AA$$

D'autre part, la matrice A^2 est définie positive si et seulement si

$$x^T A^2 x > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (\ddagger)$$

La forme quadratique apparaissant dans le membre de gauche peut s'écrire

$$x^T A^2 x = x^T A^T A x = (Ax)^T A x = \|Ax\|^2 \geq 0$$

Par définition de la norme, l'annulation ne peut intervenir que si $Ax = 0$ soit, puisque A est symétrique définie positive et donc inversible, que si $x = 0$. Dès lors, la propriété $(\ddagger)$ est vérifiée. La matrice A^2 est donc symétrique définie positive.

Alternativement, on peut écrire que, si λ est une valeur propre de A ,

$$Ax = \lambda x$$

et donc

$$A^2 x = AAx = A\lambda x = \lambda^2 x$$

de sorte que λ^2 est une valeur propre de A . La matrice A étant symétrique définie positive, ses valeurs propres sont toutes réelles et strictement positives. Les valeurs propres de A sont donc toutes strictement positives, et la matrice A^2 est donc bien symétrique définie positive.

Question II

i. Matriciellement, le système à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Construisons une forme normale échelonnée de (A b) afin de tester la compatibilité de ce système et de le résoudre. Partant de

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

il vient successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \rightarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3 - \ell_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

puis

$$c_2 \leftrightarrow c_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

et, enfin,

$$\begin{array}{l} \ell_1 \rightarrow \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3 + 2\ell_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La solution s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs $\mathbf{x} \in E$ recherchés s'écrivent alors

$$\mathbf{x} = (3 - 2\lambda - 3\mu)\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + (\mu - 1)\mathbf{e}_3 + \mu\mathbf{e}_4 \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

ii. Par inspection de la solution obtenue au point i., le noyau est décrit par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Pour construire une base orthonormée, il faut prendre 2 vecteurs orthonormés parmi ceux identifiés ci-dessus. Les vecteurs de composantes

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants et peuvent être orthonormés en utilisant la méthode de Gram-Schmidt. Il vient tout d'abord

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} x^{(2)} - (E_1^T x^{(2)}) E_1 &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (-2 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12/5 \\ 6/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En normant ce vecteur, on obtient

$$E_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En fonction des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 , les vecteurs de base du noyau de $\mathcal{A}$ peuvent donc s'écrire sous la forme

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2e_1 + e_2)$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{95}}(-3e_1 - 6e_2 + 5e_3 + 5e_4)$$

iii. La relation

$$\dim E = \dim \ker(\mathcal{A}) + \rho(\mathcal{A})$$

s'écrit ici

$$4 = 2 + \rho(\mathcal{A})$$

Le rang de $\mathcal{A}$ vaut donc 2, résultat qui peut aussi être obtenu par inspection de la forme normale échelonnée obtenue en i.

Question III

- i. Le tenseur peut être représenté par une matrice diagonale quel que soit α car la matrice est symétrique, donc normale, quel que soit α . Elle possède donc bien 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
- ii. Le tenseur $\mathbf{K}$ est représenté par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres de la matrice K . Il faut choisir des vecteurs propres orthogonaux et normés pour que la base soit orthonormée. La matrice diagonale correspondante est constituée des valeurs propres de K , prises dans le même ordre que les vecteurs qui leur sont associés. Dans le cas où $\alpha = 0$, la matrice K devient

$$K = k_0 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Recherche des valeurs propres de K

Les valeurs propres de K s'obtiennent en multipliant par k_0 les valeurs propres de $K' = K/k_0$. Ces dernières sont les zéros de

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)-4] - 4(4-\lambda) \\ = (4-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)-8] = (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda)$$

Ainsi, les valeurs propres de K' sont 0, 4 et 6 et celles de K sont 0, $4k_0$ et $6k_0$.

Recherche des vecteurs propres de K

Ce sont les mêmes que ceux de la matrice $K' = K/k_0$.

- ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 6 de K' sont les solutions non nulles de

$$(K' - 6\mathbb{I})\mathbf{x} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Il vient successivement, en commençant par diviser toutes les lignes de la matrice par -2 ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}_0$$

- ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 de K' sont les solutions non nulles de

$$(K' - 4\mathbb{I})\mathbf{x} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Il vient successivement, en commençant par diviser toutes les lignes de la matrice par 2,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \rightarrow \ell_3 - \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 \leftrightarrow c_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \rightarrow \ell_1 + \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}_0$$

soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}_0$$

◇ Enfin, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 de K' sont les solutions non nulles de

$$K'x = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Il vient successivement, en commençant par diviser toutes les lignes de la matrice par 2,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \rightarrow \ell_3 - 2\ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \rightarrow \ell_2/2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \rightarrow \ell_1 - \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}_0$$

Pour construire une base orthonormée formée de vecteurs propres de K , il faut prendre 3 vecteurs orthonormés parmi ceux identifiés ci-dessus. Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes étant orthogonaux (puisque K est symétrique), il suffit d'identifier un vecteur propre unitaire pour chaque valeur propre.

Dans la base orthonormée formée des vecteurs

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

le tenseur $\mathbf{K}$ est représenté par la matrice diagonale $\text{diag}(6k_0, 4k_0, 0)$.

iii. La condition imposée par le second principe de la thermodynamique équivaut à

$$-\frac{(-\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}}{T^2} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}$$

ou, après simplification, à

$$(\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}$$

Dans la base orthonormée considérée, cette dernière condition s'écrit sous la forme matricielle

$$\mathbf{g}^T \mathbf{K} \mathbf{g} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}$$

Elle est donc satisfaite si la matrice symétrique K est semi-définie positive, ce qui est vérifié si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Lorsque $\alpha = 0$, les valeurs propres sont bien positives ou nulles $(6k_0, 4k_0, 0)$, de sorte que la matrice est semi-définie positive et que le second principe de la thermodynamique est bien vérifié.