Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2024

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Simplifiez l'expression

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$$

où **a**, **b** et **c** sont des vecteurs quelconques de l'espace physique $\mathcal{E}$ tels que **a** et **c** sont orthogonaux l'un à l'autre et **a** est unitaire.

ii. Montrez que tout sous-ensemble $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, où $n \geq m$, constitue une famille de vecteurs linéairement indépendants.

iii. Soit une application linéaire $\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{E}$.

(a) Définissez le rang de $\mathcal{A}$.

(b) Montrez que $\lambda = 0$ est une valeur propre de $\mathcal{A}$ si $\rho(\mathcal{A}) < \dim \mathtt{E}$.

(c) Dans le cas particulier où $\mathcal{A}$ possède n valeurs propres distinctes où $n = \dim(\mathtt{E})$, montrez que $\rho(\mathcal{A})$ ne peut prendre que les valeurs n et $n-1$.

iv. Soit A une matrice de dimensions $(m \times n)$. Montrez que si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, il en va de même des colonnes de AB pour toute matrice B inversible d'ordre n.

Question II

Déterminez toutes les solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} x + 7y + 3z = 2 \\ x + 5y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + az = b \end{cases}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction des paramètres a et $b \in \mathbb{R}$.

Tournez la page.

Question III

Le tenseur de conductivité thermique **K** décrit les propriétés de diffusion de la chaleur dans un milieu continu. Dans une base orthonormée, les composantes du flux de chaleur **J** et du gradient de température ∇T sont liées par la relation matricielle

$$\mathsf{J} = -\mathsf{K}\nabla T$$

où K désigne les composantes de **K** dans cette base. Dans la base orthonormée particulière $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, on a

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta & 1-\beta \\ 2 & 1-\beta & 4 \end{pmatrix}$$

où $k_0 > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

i. Sans effectuer aucun calcul, justifiez le fait que toutes les valeurs propres de **K** sont réelles quelles que soient les valeurs de β et k_0.

ii. Montrez qu'il n'existe pas de valeurs des paramètres β et k_0 pour lesquelles

$$\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T < 0 \qquad \forall \nabla T \neq 0$$

c'est-à-dire telles qu'un gradient de température dans une direction donnée induit systématiquement un flux de chaleur non nul dans la direction opposée.

iii. Dans le cas où $\beta = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, l'expression de vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle **K** est représenté par une matrice diagonale. Donnez cette matrice.

SOLUTION TYPE

Question I

i. L'expression

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$$

est le produit mixte $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}]$. En effectuant une permutation circulaire des trois vecteurs de ce produit mixte, on a

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = [\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] &= \Big\{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}\Big\} \cdot \mathbf{b} \\ &= \Big\{\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\Big\} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

où on a pris en compte que $\mathbf{a}$ est unitaire ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$) et orthogonal à $\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$).

ii. Soient $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$, n vecteurs linéairement indépendants.
Considérons $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, un sous-ensemble constitué de m de ces vecteurs ($m \leq n$).
Supposons que ces m vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Il existerait donc des scalaires λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

Ces mêmes scalaires non tous nuls permettraient d'écrire

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m + 0\mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle les n vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$ sont linéairement indépendants. Les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_m$ formant un sous-ensemble d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants constituent donc une famille de vecteurs linéairement indépendants.

iii. Soit une application linéaire $\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{E}$.

(a) Le rang de $\mathcal{A}$ est défini par $\rho(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{im} \mathcal{A})$.

(b) Le théorème du rang s'écrit

$$\dim \mathtt{E} = \rho(\mathcal{A}) + \dim(\ker \mathcal{A})$$

Si $\rho(\mathcal{A}) < \dim \mathtt{E}$, $\dim(\ker \mathcal{A}) > 0$. Nous en déduisons qu'il existe des vecteurs $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tels que $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, soit $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x}$. Ceci montre que $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $\mathcal{A}$ relatif à la valeur propre $\lambda = 0$.

(c) Le théorème du rang s'écrit

$$\dim \mathtt{E} = n = \rho(\mathcal{A}) + \dim(\ker \mathcal{A})$$

Si $\mathcal{A}$ possède n valeurs propres distinctes, la multiplicité de $\lambda = 0$ comme valeur propre de $\mathcal{A}$ est donc égale à 0 ou 1. Il y a donc au maximum un vecteur propre linéairement indépendant relatif à $\lambda = 0$, c'est-à-dire au maximum un vecteur linéairement indépendant solution de $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Nous en déduisons que $\dim(\ker \mathcal{A}) \leq 1$ de sorte que $\rho(\mathcal{A})$ peut seulement prendre les valeurs n (si $\dim(\ker \mathcal{A}) = 0$) et $n - 1$ (si $\dim(\ker \mathcal{A}) = 1$).

iv. Une matrice possède une inverse à gauche si et seulement si ses colonnes sont linéairement indépendantes.
D'une part, la matrice A de dimensions $(m \times n)$ possède une inverse à gauche A_g^{-1} de dimensions $(n \times m)$ puisque ses colonnes sont linéairement indépendantes. D'autre part, la matrice B d'ordre n est inversible de sorte que B^{-1} d'ordre n existe. On a donc

$$(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}_g^{-1})\mathsf{A}\mathsf{B} = \mathsf{B}^{-1}\mathbb{I}_n\mathsf{B} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{B} = \mathbb{I}_n$$

ce qui montre que la matrice $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}_g^{-1}$ est inverse à gauche de la matrice $\mathsf{A}\mathsf{B}$. Les colonnes de $\mathsf{A}\mathsf{B}$ sont donc linéairement indépendantes.

Question II

Le système à résoudre s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & a & b \end{array}\right)$$

On a successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -16 & a-6 & b-4 \end{array}\right) \quad \ell_2 \to -\ell_2/2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -16 & a-6 & b-4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 7\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + 16\ell_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a+2 & b+4 \end{array}\right) \tag{$*$}$$

- Si $a \neq -2$, on continue l'échelonnage en divisant la troisième ligne par $a+2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+4}{a+2} \end{array}\right)$$

  puis

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + \ell_3/2 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \ell_3/2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{b-3a-2}{2(a+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-2}{2(a+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+4}{a+2} \end{array}\right)$$

  Le système possède alors, quelle que soit la valeur de b, la solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2(a+2)} \begin{pmatrix} b-3a-2 \\ a-b-2 \\ 2b+8 \end{pmatrix} \tag{$\clubsuit$}$$

- Si $a = -2$, la matrice $(*)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b+4 \end{array}\right) \tag{$**$}$$

  ◇ Si $b \neq -4$, le système est incompatible.

◇ Si $b=-4$, la matrice $(**)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solution du système est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (\heartsuit)$$

En conclusion,

- si $a \neq -2$, la solution est unique et donnée par $(\clubsuit)$;
- si $a=-2$ et $b=-4$, les solutions sont données par $(\heartsuit)$;
- si $a=-2$ et $b \neq -4$, le système est incompatible.

Question III

i. Le tenseur $\mathbf{K}$ est représenté par une matrice symétrique quels que soient $k_0 > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres d'une telle matrice étant toujours réelles, toutes les valeurs de $k_0 > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ conduisent à des valeurs propres réelles pour le tenseur $\mathbf{K}$.

ii. Vu la définition de J et vu la symétrie de K, on a

$$\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T = -\nabla T^{\mathrm{T}}\mathsf{K}^{\mathrm{T}}\nabla T = -\nabla T^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\nabla T$$

On aura donc $\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T < 0, \forall\, \nabla T \neq 0$, si

$$\nabla T^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\nabla T > 0, \quad \forall\, \nabla T \neq 0$$

c'est-à-dire si la matrice K est définie positive.

Appliquons le critère de Sylvester, qui dit qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs, à la matrice symétrique

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta & 1-\beta \\ 2 & 1-\beta & 4 \end{pmatrix}$$

- Le premier mineur diagonal principal, k_0, est strictement positif.
- Le deuxième mineur diagonal principal vaut

$$k_0^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\beta \end{vmatrix} = k_0^2 2\beta$$

  Il est strictement positif si $\beta > 0$.
- Le troisième mineur diagonal principal vaut

$$k_0^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta & 1-\beta \\ 2 & 1-\beta & 4 \end{vmatrix} = k_0^3 \left[8\beta - (1-\beta)^2 - 8\beta\right] = -k_0^3(1-\beta)^2$$

  Le déterminant de la matrice n'est jamais strictement positif de sorte que la matrice n'est jamais définie positive.

  Il n'existe donc pas de valeurs des paramètres β et k_0 pour lesquelles

$$\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T < 0 \qquad \forall \nabla T \neq 0$$

.

iii. Dans le cas où $\beta = 1$,

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est représentée par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres.

Recherche des valeurs propres de K.

Les valeurs propres de la matrice K sont données par celles de la matrice K/k_0 multipliées par k_0. Les valeurs propres de K/k_0 sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0} - \lambda\mathbb{I}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\lambda(\lambda-5) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de K sont donc simples et égales à

$$0,\ 2k_0,\ 5k_0$$

Recherche des vecteurs propres de K.

Les vecteurs propres de la matrice K sont les mêmes que ceux de la matrice K/k_0.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 0$ de K/k_0 sont les solutions w_1 non nulles de

$$\frac{\mathsf{K}}{k_0}\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Échelonnons la matrice en divisant la deuxième ligne par 2 et en soustrayant 2 fois la première ligne à la troisième.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$\mathsf{w}_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 2k_0$ de K/k_0 sont les solutions w_2 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0} - 2\mathbb{I}\right)\mathsf{w}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\ell_1 \to -\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \leftrightarrow \ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Il est ensuite nécessaire d'échanger les colonnes 2 et 3 afin d'amener un élément non nul dans la deuxième colonne. Ceci demande d'échanger les inconnues y et z de sorte que le système à résoudre devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ensuite,

$$\ell_2 \to \ell_2/6 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}_0$$

et, en échangeant les variables y et z,

$$\mathsf{w}_2 = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 5k_0$ de K/k_0 sont les solutions w_3 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0} - 5\mathbb{I}\right) \mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to -\ell_1/4 \\ \ell_2 \to -\ell_2/3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}_0$$

Comme la matrice K est symétrique donc normale, les vecteurs propres de valeurs propres différentes sont orthogonaux. Il suffit donc de normer les vecteurs obtenus ci-dessus pour obtenir une base orthonormée

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3)$$

dans laquelle la matrice K est représentée par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}(0, 2k_0, 5k_0)$$