Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2025

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. On considère un triangle quelconque de côtés de longueurs a, b et c et d'angles opposés à ces côtés d'amplitudes α, β, γ. En utilisant l'algèbre vectorielle, démontrez le théorème de Pythagore généralisé

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

ii. Soit l'application linéaire $\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{F}$ et soit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,...$\mathbf{e}_k$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathtt{E}$. Si $\mathcal{A}_g^{-1}$ existe, les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$,...$\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)$ sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez.

iii. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^n_n$ des matrices réelles carrées de dimension n, on définit une opération notée ':', telle que

$$\forall \mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{R}^n_n, \quad \mathsf{A} : \mathsf{B} = \operatorname{trace}(\mathsf{A}^T\mathsf{B})$$

et une opération notée 'sym', telle que

$$\forall \mathsf{A} \in \mathbb{R}^n_n, \quad \operatorname{sym}\mathsf{A} = \frac{\mathsf{A} + \mathsf{A}^T}{2}$$

(a) Indiquez à quel ensemble appartient $\mathsf{A} : \mathsf{B}$.

(b) Montrez que

$$\mathsf{A} : (\mathsf{B}\mathsf{C}) = (\mathsf{B}^T\mathsf{A}) : \mathsf{C}$$

(c) Exprimez $\mathsf{A} : \mathsf{B}$ en fonction des éléments a_{ij} et b_{ij} des matrices A et B.

(d) Montrez que si A est symétrique alors

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} = \operatorname{sym}\mathsf{A} : \operatorname{sym}\mathsf{B}$$

iv. On considère le système

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \tag{†}$$

où A est une matrice de dimensions $(m \times n)$ avec m et n strictement supérieurs à 1 et où $\mathsf{b} \neq 0$.

(a) À combien d'équations linéaires pour combien d'inconnues correspond le système matriciel (†) ?

(b) Si $m > n$ et que le système est compatible, à quelle condition le système (†) possède-t-il une solution unique ? Justifiez.

(c) Montrez que le système est compatible si A peut s'écrire sous la forme $\mathsf{A} = \mathsf{b}\mathsf{u}^T$ où u désigne une matrice-colonne non nulle appartenant à $\mathbb{R}^n$. La solution est-elle unique ? Justifiez.

Tournez la page.

Question II

Dans la base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ d'un espace vectoriel complexe E, on détermine les composantes

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

de trois vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ de E.

Déterminez une base orthonormée du sous-espace vectoriel de E généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ et exprimez les vecteurs de cette base en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}_4$. Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?

Question III

Le tenseur d'inertie $\mathbf{J}_\mathrm{O}$ d'un solide par rapport à un point O permet de calculer le moment d'inertie J_d de ce corps pour la rotation autour d'un axe de direction $\mathbf{d}$ (vecteur unitaire) quelconque passant par O selon $J_d = \mathbf{d} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{O} \cdot \mathbf{d}$.

Dans la base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, le tenseur d'inertie d'un barreau parallélépipédique est donné par

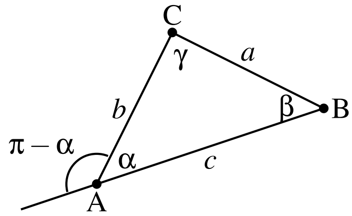
$$\mathsf{J}_\mathrm{O} = \frac{mh^2}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(où m et h sont des constantes strictement positives) si on évalue ce tenseur par rapport à un sommet O du barreau.

i. Montrez que, conformément à la signification physique, J_d est strictement positif quelle que soit la direction $\mathbf{d}$ considérée.
ii. Sans effectuer aucun calcul, justifiez l'existence d'une base orthonormée $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ dans laquelle $\mathbf{J}_\mathrm{O}$ est représenté par une matrice diagonale.
iii. Déterminez les moments principaux d'inertie, *i.e.* les éléments non nuls de la matrice diagonale représentant $\mathbf{J}_\mathrm{O}$ dans la base formée par les vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$.
iv. Déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, la direction $\mathbf{d}$ de l'axe de rotation par rapport auquel le solide présente le plus grand moment d'inertie.

Question I

i. Soit le triangle ABC représenté ci-dessous.



On a successivement

$$\mathbf{BC} = \mathbf{BA} + \mathbf{AC}$$

$$\|\mathbf{BC}\|^2 = (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) \cdot (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) = \|\mathbf{BA}\|^2 + \|\mathbf{AC}\|^2 + 2\|\mathbf{BA}\|\|\mathbf{AC}\|\cos(\pi - \alpha)$$

soit

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$

ii. Considérons la relation linéaire

$$\lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + ... + \lambda_k \mathcal{A}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$$

Appliquant l'opérateur inverse à gauche $\mathcal{A}_g^{-1}$ à cette relation, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathcal{A}_g^{-1}\Big(&\lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \cdots + \lambda_k \mathcal{A}(\mathbf{e}_k)\Big) \\ &= \lambda_1 \mathcal{A}_g^{-1}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)) + \lambda_2 \mathcal{A}_g^{-1}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)) + \cdots + \lambda_k \mathcal{A}_g^{-1}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)) \\ &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{e}_k\end{aligned}$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$ sont linéairement indépendants, il vient

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

de sorte que les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$,...$\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)$ sont linéairement indépendants.

iii. (a) Puisque la trace d'une matrice réelle appartient à $\mathbb{R}$, nous déduisons que

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} = \text{trace}\,(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}) \in \mathbb{R}$$

(b) Nous déduisons successivement

$$\begin{aligned}\mathsf{A} : (\mathsf{BC}) &= \text{trace}\,[\mathsf{A}^{\mathsf{T}}(\mathsf{BC})] \\ &= \text{trace}\,[(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B})\mathsf{C}] \\ &= \text{trace}\,[(\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\mathsf{A})^{\mathsf{T}}\mathsf{C}] \\ &= (\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}) : \mathsf{C}\end{aligned}$$

(c) Par définition de la trace et du produit matriciel, nous obtenons

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} = \text{trace}\,(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\mathsf{A}^{\mathsf{T}})_{ij}(\mathsf{B})_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji}$$

(d) Si A est symétrique, alors $\mathsf{A}^\mathrm{T} = \mathsf{A} = \operatorname{sym}\mathsf{A}$ tandis que $\operatorname{sym}\mathsf{B} = \dfrac{\mathsf{B}+\mathsf{B}^\mathrm{T}}{2}$. En utilisant le résultat du point (b), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{sym}\mathsf{A} : \operatorname{sym}\mathsf{B} &= \mathsf{A} : \frac{\mathsf{B}+\mathsf{B}^\mathrm{T}}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji} \qquad \text{puisque } \mathsf{A} \text{ est symétrique} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \mathsf{A} : \mathsf{B}
\end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

iv. (a) La matrice A étant de dimensions $(m \times n)$, les dimensions de x doivent être $(n \times 1)$ pour que la pré-multiplication par A soit possible. Le résultat b est alors de dimensions $(m \times 1)$.

Le système matricielle décrit donc un système linéaire de m équations à n inconnues.

(b) Un système linéaire compatible possède une solution unique si et seulement si le noyau de A se réduit au seul élément $\mathsf{x} = 0$. Puisque, par le théorème du rang,

$$\dim\ker\mathsf{A} = n - \rho(\mathsf{A})$$

on en déduit que le système possède une solution unique si $\rho(\mathsf{A}) = n$, soit si n des m équations sont linéairement indépendantes.

(c) Dans le cas où $\mathsf{A} = \mathsf{b}\mathsf{u}^\mathrm{T}$, le système s'écrit sous la forme

$$\mathsf{b}\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{x} = \mathsf{b} \tag{$\heartsuit$}$$

Ce système peut être simplifié en le pré-multipliant par b^T et en observant que $\mathsf{b}^\mathrm{T}\mathsf{b}$ est un scalaire non nul. En procédant de la sorte, on obtient

$$(\mathsf{b}^\mathrm{T}\mathsf{b})\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{x} = (\mathsf{b}^\mathrm{T}\mathsf{b})$$

soit, après simplification par le facteur non nul $(\mathsf{b}^\mathrm{T}\mathsf{b})$,

$$\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{x} = 1$$

Le système ($\heartsuit$) est donc compatible puisqu'il possède la solution

$$\mathsf{x} = \frac{1}{\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{u}}\mathsf{u}$$

où la division par $\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{u}$ est licite puisque u est non nul et que $\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{u} \neq 0$.

La solution n'est pas unique puisqu'on peut ajouter à x n'importe quel élément $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{v} = 0$. De tels éléments v existent puisque u est générateur d'un sous-espace $\mathtt{E}_\mathsf{u}$ de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$ et que tous les éléments v de $\mathtt{E}_\mathsf{u}^\perp$, où $\mathtt{E}_\mathsf{u}^\perp$ est de dimension $n-1$, sont tels que $\mathsf{u}^\mathrm{T}\mathsf{v} = 0$.

Question II

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée du sous-espace vectoriel généré par les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ définis par leurs composantes dans la base $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}$.

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\|\mathsf{x}_1\|}$$

On calcule aisément

$$\|\mathsf{x}_1\|^2 = \mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1 = 0+0+2^2+0 = 4$$

de sorte que le premier vecteur est décrit par

$$\mathsf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on calcule

$$\mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_2 - (\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_2)\ \mathsf{z}_1$$

où

$$\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

de sorte que

$$\mathsf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\|\mathsf{y}_2\|^2 = (|1|^2+|i|^2+|0|^2+|1|^2) = 3$$

le second vecteur de la base est décrit par

$$\mathsf{z}_2 = \frac{\mathsf{y}_2}{\|\mathsf{y}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, afin d'identifier un troisième vecteur, on considère

$$\mathsf{y}_3 = \mathsf{x}_3 - (\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_3)\ \mathsf{z}_1 - (\mathsf{z}_2{}^*\mathsf{x}_3)\ \mathsf{z}_2$$

où

$$\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} = 0$$

et

$$\mathsf{z}_2{}^*\mathsf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2i+2i+0+2i) = 2\sqrt{3}i$$

On obtient

$$
\mathsf{y}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} - (2\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} - 2i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Ce résultat indique que x_3 est une combinaison linéaire de x_1 et x_2.

Les matrices-colonnes z_1 et z_2 obtenues ci-dessus donnent les composantes des vecteurs orthonormés $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ constituant une base du sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$. En fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}_4$, on a

$$
\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4)
$$

Le sous-espace vectoriel considéré est de dimension 2.

Question III

i. Dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, la condition

$$
J_d = \mathbf{d} \cdot \mathbf{J}_O \cdot \mathbf{d} > 0 \quad \forall \mathbf{d} \neq \mathbf{0}
$$

s'écrit matriciellement

$$
J_d = \mathsf{d}^T \mathsf{J}_O \, \mathsf{d} > 0 \quad \forall \mathsf{d} \neq 0
$$

La matrice J_O doit donc être définie positive. Par application du critère de Sylvester à la matrice symétrique J_O, on sait que ce sera le cas si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de J_O sont strictement positifs. Ces mineurs sont

$$
\frac{mh^2}{3} > 0, \qquad \left(\frac{mh^2}{6}\right)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9\left(\frac{mh^2}{6}\right)^2 > 0
$$

et

$$
\left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 0 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{array}
$$

$$
= \left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 (-1)(-1)^3(63-35) = 28\left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 > 0
$$

Ces 3 mineurs étant strictement positifs, on en conclut que le moment d'inertie est strictement positif quelle que soit la direction considérée.

ii. La matrice J_O d'ordre 3 étant symétrique, donc normale, elle possède 3 vecteurs propres mutuellement orthogonaux et est diagonale dans la base orthonormée correspondante.

iii. Les moments principaux d'inertie recherchés sont les valeurs propres de la matrice J_O.
Les valeurs propres de J_O sont, au facteur $mh^2/6$ près, celles de

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}
$$

elles-mêmes solutions de

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -7+\lambda & 7-\lambda \end{vmatrix} \qquad c_2 \to c_2 + c_3$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (7-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

La matrice $\mathsf{J_O}$ possède donc 3 valeurs propres distinctes qui sont les moments principaux d'inertie du barreau considéré :

$$J_1 = \frac{mh^2}{6}, \quad J_2 = \frac{2mh^2}{3} \quad \text{et} \quad J_3 = \frac{7mh^2}{6}$$

iv. La direction **d** recherchée est celle des vecteurs propres relatifs à la plus grande valeur propre, c'est-à-dire ici à la valeur propre $J_3 = 7mh^2/6$. Il s'agit d'une solution de norme égale à 1 du système

$$\left(\mathsf{J_O} - \frac{7mh^2}{6}\mathbb{I}\right)\mathsf{w} = 0$$

donc de

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Multipliant la matrice par -1 et échangeant les deux premières lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ensuite,

$$\begin{matrix} \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_2 \to \ell_2 - 5\ell_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis,

$$\ell_2 \to -\ell_2/9 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin,

$$\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système, donnant les composantes des vecteurs propres relatifs à la valeur propre J_3 dans la base des $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, s'écrivent alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0$$

et la direction **d** recherchée vaut $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.