Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2024

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. (a) Montrez que si les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de l'espace physique $\mathcal{E}$ sont linéairement indépendants (mais pas forcément orthogonaux), alors $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\}$ constitue une base de $\mathcal{E}$.

   (b) Déterminez les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque de $\mathcal{E}$ dans la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\}$ en fonction des produits scalaires de $\mathbf{x}$ avec les vecteurs de cette base dans le cas particulier où les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont unitaires.

ii. Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ de dimension n. On définit $\mathcal{A}$ telle que, $\forall \mathbf{x} \in \mathtt{E}$,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}|\mathbf{x})\mathbf{a}$$

   (a) Montrez que $\mathcal{A}$ définit une application linéaire si l'espace vectoriel $\mathtt{E}$ est réel mais pas s'il est complexe.

   (b) Déterminez $\rho(\mathcal{A})$.

   (c) Caractérisez $\ker(\mathcal{A})$.

iii. Si la matrice carrée A d'ordre n est symétrique, montrez que A^2 est symétrique semi-définie positive.

iv. Soit A une matrice de dimensions $(m \times n)$ où $m \neq n$.

   (a) Énoncez des conditions nécessaires et suffisantes pour que A possède une inverse à gauche.

   (b) Écrivez une matrice A non carrée (au choix) qui possède une inverse à gauche ? Justifiez.

   (c) Si une matrice A possède une inverse à gauche, celle-ci est-elle nécessairement la pseudo-inverse de A ? Justifiez.

Question II

Déterminez toutes les solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} w + ax + ay + z = 1 \\ w + ax + y + z = 2a \\ aw + x + y + az = a \end{cases}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Tournez la page.

Question III

Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Calculez le déterminant de A.
ii. Calculez l'inverse de A.
iii. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
iv. La matrice A est-elle diagonalisable par une transformation de similitude ? Justifiez.

Question I

i. (a) L'espace physique $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3. Tout ensemble de trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{E}$ constitue dès lors une base de cet espace.

Les 3 vecteurs **a**, **b** et $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants puisque leur produit mixte

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}] = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2$$

est non nul. En effet, les vecteurs **a** et **b** ne sont ni nuls ni parallèles (multiples l'un de l'autre) puisqu'ils sont linéairement indépendants.

On en conclut que $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}$ constitue bien une base de $\mathcal{E}$.

(b) Tout vecteur **x** peut s'exprimer (de façon unique) dans la base $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}$ au moyen de 3 composantes α, β et γ sous la forme

$$\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}+\gamma\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$$

On a donc

$$\begin{cases} \mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\gamma\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = \alpha+\beta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{b} = \alpha\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\beta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\gamma\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = \alpha\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\beta \\ \mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})+\beta\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})+\gamma\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \gamma\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2 \end{cases}$$

où on a tenu compte du fait que $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ est orthogonal à **a** et **b** et que les vecteurs **a** et **b** sont unitaires. Remarquons que le vecteur $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ n'est en général pas unitaire même si les vecteurs **a** et **b** le sont.

La troisième équation donne directement

$$\gamma = \frac{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2}$$

Les composantes α et β s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} \alpha+\beta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{a} \\ \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\beta = \mathbf{x}\cdot\mathbf{b} \end{cases}$$

Multipliant la première équation par $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et soustrayant membre à membre, on obtient

$$\beta\left[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2-1\right] = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}$$

dont on déduit que

$$\beta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$$

De même, en multipliant la seconde équation par $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et en soustrayant membre à membre ou en exploitant la symétrie du problème, on obtient

$$\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$$

Remarquons que la division par $1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$ est licite puisque, les vecteurs unitaires **a** et **b** étant linéairement indépendants, ils ne sont pas parallèles et

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq \pm 1$$

ii. (a) $\mathcal{A}$ définit une application linéaire sur l'espace vectoriel $\mathtt{E}$ si, pour tous vecteurs **x** et **y** de $\mathtt{E}$ et tous scalaires λ et μ de $\mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{y})$$

Pour $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}|\mathbf{x})\mathbf{a}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= (\mathbf{b}|[\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}])\mathbf{a} = (\mathbf{b}|\lambda\mathbf{x})\mathbf{a}+(\mathbf{b}|\mu\mathbf{y})\mathbf{a}\\ &= \overline{\lambda}(\mathbf{b}|\mathbf{x})\mathbf{a}+\overline{\mu}(\mathbf{b}|\mathbf{y})\mathbf{a} = \overline{\lambda}\mathcal{A}(\mathbf{x})+\overline{\mu}\mathcal{A}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Ceci ne définit donc pas une application linéaire si on considère $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire si on travaille dans un espace vectoriel complexe. Par contre, si $\mathtt{E}$ est un espace vectoriel réel, on a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda = \overline{\lambda}$, $\mu = \overline{\mu}$ de sorte que

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{y})$$

La définition proposée est donc bien celle d'une application linéaire dans un espace vectoriel réel.

(b) On a

$$\rho(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) \leq 1$$

puisque tous les vecteurs appartenant à $\operatorname{im}\mathcal{A}$ s'écrivent $(\mathbf{b}|\mathbf{x})\mathbf{a}$ et sont donc multiples du seul vecteur $\mathbf{a}$ non nul.
Par ailleurs, $\operatorname{im}\mathcal{A}$ contient au moins un vecteur non nul puisque, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant non nuls, on a

$$\mathcal{A}(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}|\mathbf{b})\mathbf{a} = \|\mathbf{b}\|^2\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

Dès lors, on a $\rho(\mathcal{A}) = 1$.

(c) Par définition du noyau, on a

$$\ker\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathtt{E} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

soit, ici,

$$\ker\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathtt{E} : (\mathbf{b}|\mathbf{x})\mathbf{a} = \mathbf{0}\}$$

Le vecteur $\mathbf{b}$ étant non nul, le noyau de $\mathcal{A}$ comprend tous les vecteurs de $\mathtt{E}$ orthogonaux à $\mathbf{b}$. Il s'identifie donc au complément orthogonal de l'espace vectoriel généré par le vecteur $\mathbf{b}$.

iii. Si A est symétrique, il en est de même de A^2 puisque

$$(\mathsf{A}^2)^{\mathrm{T}} = (\mathsf{AA})^{\mathrm{T}} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = \mathsf{AA} = \mathsf{A}^2$$

Quel que soit $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a par ailleurs

$$\mathsf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^2\mathsf{x} = \mathsf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{AAx} = \mathsf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{Ax} = (\mathsf{Ax})^{\mathrm{T}}(\mathsf{Ax}) = \|\mathsf{Ax}\|^2 \geq 0$$

Dès lors, A^2 est symétrique semi-définie positive.

iv. (a) Une matrice A de dimensions $(m \times n)$ possède une inverse à gauche si et seulement si $\rho(\mathsf{A}) = n$ ou, de façon équivalente, si et seulement si ses n colonnes sont linéairement indépendantes.

(b) Pour une matrice non carrée, la condition énoncée ci-dessus n'est réalisable que si $n < m$ puisque le nombre de lignes linéairement indépendantes est toujours égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes. Considérons par exemple la matrice A, de dimensions (3×2) et de rang égal à 2,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On identifie facilement une inverse à gauche

$$\mathsf{A}_g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) La pseudo-inverse d'une matrice est unique. Or, l'inverse à gauche ne l'est pas. On peut s'en convaincre facilement en remarquant que toute matrice du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \; a,b \in \mathbb{R}$$

est inverse à gauche de la matrice A.
Une inverse à gauche d'une matrice A n'est donc pas forcément la pseudo-inverse de A.

Question II

Le système à résoudre s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 2a \\ a & 1 & 1 & a & a \end{array}\right)$$

On a successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - a\ell_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a^2 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (*)$$

- Si $a \neq \pm 1$, on continue l'échelonnage en divisant la troisième ligne par $1-a^2$ et en la permutant avec la deuxième ligne,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 2a-1 \end{array}\right)$$

  puis

$$\ell_1 \to \ell_1 - a\ell_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 2a-1 \end{array}\right)$$

$$\ell_3 \to \ell_3/(1-a) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{2a-1}{1-a} \end{array}\right)$$

$$\ell_2 \to \ell_2 - \ell_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{1-2a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{2a-1}{1-a} \end{array}\right)$$

  et les solutions s'écrivent

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-2a}{1-a} \\ \dfrac{2a-1}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (\clubsuit)$$

- Si $a = 1$, la matrice $(*)$ devient
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
où la seconde ligne indique que le système est incompatible.

- Si $a = -1$, la matrice $(*)$ devient
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
En échangeant la deuxième et la troisième colonne, on obtient
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
L'échelonnage peut ensuite être poursuivi. On a successivement
$$\ell_2 \to \ell_2/2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \ell_1 \to \ell_1 + \ell_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Le système possède donc les solutions (où les variables x et y ont été échangées suite à l'échange des colonnes correspondantes)
$$\begin{pmatrix} w \\ y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
soit
$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (\diamondsuit)$$

En conclusion,

- si $a \neq \pm 1$, les solutions sont données par $(\clubsuit)$;
- si $a = 1$, le système est incompatible ;
- si $a = -1$, les solutions sont données par $(\diamondsuit)$.

Question III

Soit
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i. L'application de la première loi des mineurs à la première ligne de la matrice donne
$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

ii. L'inverse se calcule en utilisant la formule

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{\Delta^{\mathrm{T}}}{\det \mathsf{A}}$$

où Δ est la matrice des cofacteurs de A avec $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ où m_{ij} est le mineur de l'élément ij de A. La matrice des mineurs s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

et on a donc

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{\Delta^{\mathrm{T}}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

iii. Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

soit

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big[(2-\lambda)(-\lambda)+1\Big]$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre simple).

- Les vecteurs propres de A relatifs à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont les solutions w_1 non nulles du système

$$(\mathsf{A} - \mathbb{I})\mathsf{w}_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Échelonnons la matrice du système. On a successivement

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$\mathsf{w}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres de A relatifs à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ sont les solutions w_2 non nulles du système

$$(\mathsf{A} - 2\mathbb{I})\mathsf{w}_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Échelonnons la matrice du système en commençant par permuter la première et la troisième ligne.

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ensuite successivement

$$\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}_0$$

iv. Une matrice d'ordre n est diagonalisable par une transformation de similitude si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants. La matrice A n'est donc pas diagonalisable par une transformation de similitude puisqu'elle ne possède que 2 vecteurs propres linéairement indépendants et pas 3.