

*Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

Question I

- i. En repartant des définitions, montrez que $(AB)^* = B^*A^*$ tout en précisant les dimensions des matrices permettant d'écrire cette égalité.
- ii. Si les éléments $x_1, x_2, \dots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants et si la matrice A de dimensions $(m \times n)$ possède une inverse à gauche, montrez que $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_p$ sont linéairement indépendants.
- iii. Déterminez la condition sur le vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$ pour que, quel que soit $\mathbf{s} \in \mathcal{E}$,

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a})$$

- iv. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{pmatrix}$$

où B est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, $\mathbb{I}_p$ désigne la matrice identité d'ordre $p \geq 1$ et C est une matrice quelconque.

- (a) Déterminez les dimensions de C .
- (b) Déterminez les valeurs propres de A et leur multiplicité en fonction des valeurs propres de B et des autres paramètres du problème.
- (c) Montrez que A est diagonalisable par une transformation de similitude si B admet n valeurs propres distinctes différentes de 1.

Question II

Soit une base orthonormée $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ d'un espace vectoriel réel E . On considère les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{x}_3 = -\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 \end{cases}$$

- i. Déterminez une base orthonormée du sous-espace vectoriel F généré par les vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$. Exprimez les vecteurs de cette base en fonction de $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ et $\mathbf{E}_4$.
- ii. Déterminez la dimension de $F^\perp$ ainsi que l'expression d'une base orthonormée de $F^\perp$.

Question III

On considère la famille de matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ de la forme

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i. Calculez $\det A_2$ et $\det A_3$.
- ii. Montrez qu'il existe une constante α telle que, $\forall n \geq 4$,

$$\det A_n + \alpha \det A_{n-2} = 0$$

- iii. Des deux points précédents, déduisez la valeur de $\det A_n$ en fonction de n .
- iv. Déterminez $\rho(A_n)$ en fonction de n .

Question IV

Soit la matrice

$$A = \sigma_0 \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4\beta & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

où σ_0 est une constante strictement positive et β un paramètre réel variable. La matrice A représente, dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, l'application linéaire $\mathcal{A}$ qui associe le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ au vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J} = \mathcal{A}(\mathbf{E})$.

- i. Déterminez toutes les valeurs de β telles que la dissipation par effet Joule ($\mathbf{J}|\mathbf{E}$) est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué.
- ii. Dans le cas où $\beta = 1$, déterminez l'expression en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ du champ électrique unitaire $\mathbf{E}_0$ conduisant à la dissipation par effet Joule la plus grande.

Question I

- i. Si A et B sont des matrices respectivement de dimensions $(m \times n)$ et $(n \times p)$, alors on peut former le produit AB dont les dimensions sont $(m \times p)$. L'adjointe $(AB)^*$ de ce produit est dès lors une matrice $(p \times m)$. D'autre part les matrices A^* et B^* sont alors des matrices de dimensions $(n \times m)$ et $(p \times n)$, respectivement. Ceci permet de former le produit B^*A^* qui définit une matrice de dimensions $(p \times m)$. Les matrices $(AB)^*$ et B^*A^* possèdent donc les mêmes dimensions.

On peut ensuite écrire

$$\left[(AB)^*\right]_{ij} = \overline{(AB)_{ji}} = \overline{\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{jk}} \overline{b_{ki}}$$

et

$$(B^*A^*)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik}^* A_{kj}^* = \sum_{k=1}^n \overline{b_{ki}} \overline{a_{jk}}$$

de sorte que l'égalité est bien vérifiée.

- ii. Les matrices-colonnes $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_p$ sont linéairement indépendantes si

$$\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \dots + \lambda_p Ax_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

Or, si A possède une inverse à gauche A_g^{-1} , il vient successivement

$$\begin{aligned} \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \dots + \lambda_p Ax_p = 0 & \Rightarrow A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = 0 \\ & \Rightarrow A_g^{-1} A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = 0 \\ & \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0 \\ & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0 \end{aligned}$$

si les $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont effectivement linéairement indépendants. Ceci démontre l'indépendance linéaire de $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_p$.

- iii. Développant le double produit vectoriel et tenant compte de la commutativité du produit scalaire, on peut écrire

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{s}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{s}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{s}$$

Cette expression est égale à $\mathbf{s}$ quel que soit $\mathbf{s}$ si et seulement $\|\mathbf{a}\|^2 = 1$, c'est-à-dire si le vecteur $\mathbf{a}$ est unitaire.

- iv. Soit

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{pmatrix}$$

où B est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, $\mathbb{I}_p$ est la matrice identité d'ordre $p \geq 1$ et C une matrice quelconque.

- (a) La matrice C possède n lignes comme B et p colonnes comme $\mathbb{I}_p$. Elle est donc de dimensions $(n \times p)$.
(b) Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_{n+p}) = \begin{vmatrix} B - \lambda \mathbb{I}_n & C \\ 0 & (1 - \lambda) \mathbb{I}_p \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^p \det(B - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs carrés formant sa diagonale principale.

Les valeurs propres de la matrice A sont donc les valeurs propres de la matrice B, avec leur multiplicité, auxquelles on adjoint la valeur propre $\lambda = 1$ avec une multiplicité p .

- (c) La matrice A est diagonalisable par une transformation de similitude si et seulement si elle possède $n + p$ vecteurs propres linéairement indépendants. C'est le cas si et seulement si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à chaque valeur propre est égal à la multiplicité de la valeur propre comme zéro du polynôme caractéristique.

Les valeurs propres de A correspondant aux valeurs propres de B sont de multiplicité 1. Relativement à chacune de ces valeurs propres, on trouve donc un vecteur propre linéairement indépendant.

La valeur propre $\lambda = 1$ est de multiplicité p . Les vecteurs propres correspondants sont les vecteurs non nuls appartenant au noyau de

$$A - \mathbb{I}_{n+p} = \begin{pmatrix} B - \mathbb{I}_n & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice B n'admet pas 1 comme valeur propre, la matrice $B - \mathbb{I}_n$ est non singulière. Dès lors, le rang de $A - \mathbb{I}_{n+p}$ est égal à n .

Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(A - \mathbb{I}_{n+p})) = n + p - n = p$. La matrice $A - \mathbb{I}_{n+p}$ possède donc p vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à $\lambda = 1$, soit exactement la multiplicité de cette valeur propre comme zéro du polynôme caractéristique.

En conclusion, dans les conditions définies dans l'énoncé, la matrice A d'ordre $n + p$ possède $n + p$ vecteurs propres linéairement indépendants et est donc diagonalisable par une transformation de similitude.

Question II

- i. Pour déterminer une base orthonormée de F , appliquons le lemme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$.

Nous ne vérifions pas que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Si ce n'est pas le cas, la procédure conduira à déterminer un vecteur nul qui ne fera évidemment pas partie de la base recherchée.

Les composantes des vecteurs considérés dans la base $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ sont données par

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenant compte de $\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_1)} = \sqrt{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} = \sqrt{2}$, on construit aisément le vecteur normé

$$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3)$$

Les composantes de ce vecteur dans la base constituée des vecteurs $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ et $\mathbf{E}_4$ peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poursuivant le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit ensuite le vecteur normé

$$\mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 | \mathbf{z}_1) \mathbf{z}_1}{\|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 | \mathbf{z}_1) \mathbf{z}_1\|}$$

Comme

$$(\mathbf{x}_2 | \mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_1^T \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

les composantes du vecteur $\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1$ dans la base $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur vaut $\sqrt{2}$ de sorte que

$$\mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4)$$

Poursuivant le processus d'orthonormation de Gram-Schmidt, on construit enfin le vecteur normé

$$\mathbf{z}_3 = \frac{\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1 - (\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2)\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1 - (\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2)\mathbf{z}_2\|}$$

On a

$$(\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_1^T \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

et

$$(\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_2^T \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Les composantes du vecteur $\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1 - (\mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2)\mathbf{z}_2$ dans la base $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\mathbf{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4)$$

En conclusion, les vecteurs

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3), \quad \mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4) \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4)$$

constituent une base orthonormée de F.

- ii. L'ensemble $F^\perp$ est le complément orthogonal de F dans E . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E puisque

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 4 - 3 = 1$$

Par définition, les vecteurs $\mathbf{y} = a\mathbf{E}_1 + b\mathbf{E}_2 + c\mathbf{E}_3 + d\mathbf{E}_4$ de $F^\perp$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de F , ce qui est le cas si et seulement si ils sont orthogonaux aux vecteurs de base de F . En exprimant cette condition, on forme le système

$$\begin{cases} (\mathbf{y}|\mathbf{z}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+c) = 0 \\ (\mathbf{y}|\mathbf{z}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b+d) = 0 \\ (\mathbf{y}|\mathbf{z}_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2a-b+2c+d) = 0 \end{cases}$$

Celui-ci s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système peut être résolu en réduisant la matrice à une forme normale échelonnée par les transformations successives

$$\begin{aligned} \ell_3 \rightarrow \ell_3 + 2\ell_1 \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3/4 \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \ell_1 \rightarrow \ell_1 - \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est donc constitué de l'ensemble des vecteurs multiples du vecteur $\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_4$. Le vecteur unitaire

$$\mathbf{z}_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_4)$$

en constitue une base orthonormée.

Question III

- i. On calcule

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{et} \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- ii. En appliquant successivement la première loi des mineurs à la première colonne de A_n puis à la première ligne de la matrice obtenue en supprimant la première colonne et la deuxième ligne de A_n , on obtient

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot \det A_{n-2} = -\det A_{n-2}$$

de sorte que, $\forall n \geq 4$,

$$\det A_n + \alpha \det A_{n-2} = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = 1$$

iii. Puisque $\det A_n = -\det A_{n-2}$ et que $\det A_3 = 0$, $\det A_n = 0$ si n est impair.

De même, puisque $\det A_n = -\det A_{n-2}$ et que $\det A_2 = -1$, $\det A_n = (-1)^{n/2}$ si n est pair.

iv. Si n est pair, $\rho(A_n) = n$ puisque $\det A_n \neq 0$.

Si n est impair, $\rho(A_n) < n$ puisque $\det A_n = 0$. La matrice A_n contient la sous-matrice A_{n-1} qui est non singulière puisque $n-1$ est pair. Dès lors, $\rho(A_n) = n-1$ si n est impair.

Question IV

i. La dissipation par effet Joule ($\mathbf{J}|\mathbf{E}$) est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué si

$$(\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E}) > 0, \quad \forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

Dans la base considérée, cette condition prend la forme

$$\mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E} > 0, \quad \forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

et exprime le caractère défini positif de $\mathbf{A}$.

La matrice étant symétrique, le critère de Sylvester affirme que $\mathbf{A}$ est définie positive si et seulement si ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs, c'est-à-dire

$$m_1 = 4\sigma_0 > 0$$

$$m_2 = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4\beta \end{vmatrix} = \sigma_0^2(16\beta - 1) > 0$$

$$m_3 = \sigma_0^3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4\beta & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6\sigma_0^3(10\beta - 1) > 0$$

Ces trois conditions sont respectées simultanément si $\beta > 1/10$.

ii. Dans le cas où $\beta = 1$, la matrice $\mathbf{A}$ s'écrit

$$\mathbf{A} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La dissipation par effet Joule (forme quadratique construite sur la matrice $\mathbf{A}$) sera la plus grande dans la (ou les) directions des vecteurs propres relatifs à la plus grande valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$.

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ s'obtiennent en multipliant par σ_0 les valeurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\sigma_0$. Les valeurs propres de $\hat{\mathbf{A}}$ sont les solutions λ de

$\det(\hat{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$, soit

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_2 + \ell_3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{c_3 \rightarrow c_3 - c_2} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) [(4-\lambda)(5-\lambda) - 2] \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 6)
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $\hat{A}$ possède les valeurs propres 3, de multiplicité 2, et 6. Dès lors, la matrice A possède les valeurs propres $3\sigma_0$, de multiplicité 2, et $6\sigma_0$.

La direction recherchée est donc celle des vecteurs propres de A relatifs à $\lambda = 6\sigma_0$ qui sont aussi ceux de $\hat{A}$ relatifs à la valeur propre $\hat{\lambda} = 6$.

Ce sont les solutions w non nulles de

$$(\hat{A} - 6\mathbb{I})w = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

On réduit la matrice du système à une forme normale échelonnée par les opérations élémentaires successives

$$\begin{aligned}
\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \ell_2 \rightarrow \ell_2 + \ell_1 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\
\ell_2 \rightarrow -\ell_2/3 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}, & \ell_1 \rightarrow \ell_1 + \ell_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& & \ell_3 \rightarrow \ell_3 + 3\ell_2 &
\end{aligned}$$

De là,

$$w = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_0$$

La direction recherchée est donc caractérisée par le vecteur unitaire (ou son opposé)

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$