Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2025

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Simplifiez l'expression $[\mathbf{a}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{c}]$ dans laquelle **a**, **b** et **c** désignent des vecteurs de l'espace physique tels que **c** est une combinaison linéaire de **a** et **b**.

ii. Si les matrices-colonnes x_1, $\mathsf{x}_2, \ldots$, x_n de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendantes, montrez que les matrices-colonnes $\mathsf{A}\mathsf{x}_1$, $\mathsf{A}\mathsf{x}_2, \ldots$, $\mathsf{A}\mathsf{x}_n$ sont également linéairement indépendantes pour toute matrice A de dimensions $(m \times n)$ telle que $\ker \mathsf{A} = \{0\}$.

iii. On considère un espace vectoriel complexe $\mathtt{E}$ et une application linéaire $\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{E}$.

   (a) Définissez l'application linéaire adjointe de $\mathcal{A}$.

   (b) Quand dit-on que l'application linéaire $\mathcal{A}$ est normale ?

   (c) En partant de la définition, déterminez l'adjointe de l'application $(\mathcal{A} - \alpha\mathfrak{I})$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

   (d) Montrez que si $\mathcal{A}$ est normale, alors $(\mathcal{A} - \alpha\mathfrak{I})$ est également normale quel que soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

iv. Soit $\mathsf{A} = \mathsf{x}\mathsf{y}^T$ où x et y désignent respectivement des matrices-colonnes de m et n éléments réels tels que

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1$$

   (a) Déterminez les dimensions de la matrice A.

   (b) Énoncez les quatre relations définissant la pseudo-inverse d'une matrice et montrez, sur cette base, que $\mathsf{A}^+ = \mathsf{y}\mathsf{x}^T$.

Question II

Déterminez toutes les solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} ax + y - az = a \\ x + 2y - az = 2a \\ -x - ay + 2z = -2 - a \end{cases}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Tournez la page.

Question III

Soit la matrice

$$\mathsf{S} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(où σ_0 est un paramètre strictement positif) représentant, dans une base orthonormée particulière $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, l'application linéaire $\mathcal{S}$ qui associe le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ au vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J} = \mathcal{S}(\mathbf{E})$.

Déterminez la(les) condition(s) sur le paramètre réel β pour que la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{S}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$ soit strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué.

Question IV

Si on schématise la suspension d'une voiture comme représenté ci-dessous, alors les vibrations libres de la voiture peuvent être décrites par

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \cos \omega t$$

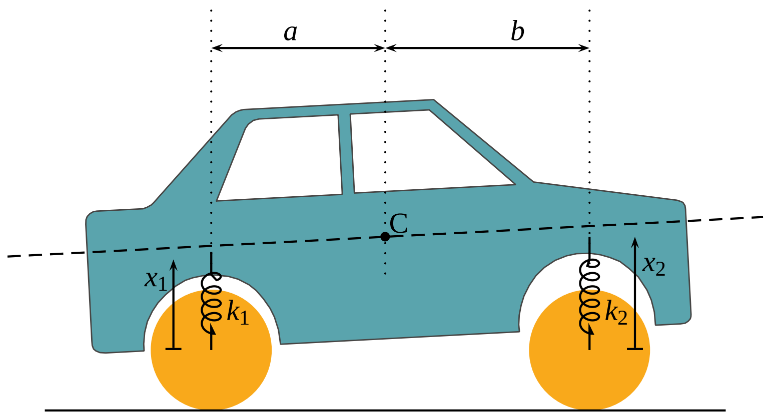
où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ désignent les élongations des amortisseurs placés à l'arrière et à l'avant et où les fréquences propres ω et les amplitudes X_1 et X_2 des oscillations des amortisseurs vérifient

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \dfrac{mb^2+J}{(a+b)^2} & \dfrac{mab-J}{(a+b)^2} \\[2ex] \dfrac{mab-J}{(a+b)^2} & \dfrac{ma^2+J}{(a+b)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Dans ces équations, k_1, k_2, m, J, a et b sont des constantes strictement positives désignant respectivement les raideurs des amortisseurs, la masse de la voiture, son moment central d'inertie et les distances des essieux au centre d'inertie. On se place dans le cas particulier où $k_1 = k_2 = k$, $b = a$ et $J = 2ma^2/3$.

i. Déterminez les fréquences propres ω.

ii. Déterminez les amplitudes X_1 et X_2 des vibrations libres correspondant à chaque fréquence propre et décrivez qualitativement le mouvement correspondant de la voiture.



SOLUTION TYPE

Question I

i. Le produit mixte $[\mathbf{a}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{c}]$ s'écrit

$$\mathbf{a}\cdot[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c})]$$

Puisque $\mathbf{c}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ et

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \beta\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$$

et dès lors

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\beta(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

On obtient donc

$$\mathbf{a}\cdot[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c})] = 0$$

ii. Les matrices-colonnes $\mathsf{A}\mathsf{x}_1$, $\mathsf{A}\mathsf{x}_2$,..., $\mathsf{A}\mathsf{x}_n$ sont linéairement indépendantes si

$$\lambda_1\mathsf{A}\mathsf{x}_1+\lambda_2\mathsf{A}\mathsf{x}_2+\cdots\lambda_n\mathsf{A}\mathsf{x}_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

Or

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathsf{A}\mathsf{x}_1+\lambda_2\mathsf{A}\mathsf{x}_2+\cdots\lambda_n\mathsf{A}\mathsf{x}_n = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{A}(\lambda_1\mathsf{x}_1+\lambda_2\mathsf{x}_2+\cdots\lambda_n\mathsf{x}_n) = 0\\ &\Rightarrow \quad \lambda_1\mathsf{x}_1+\lambda_2\mathsf{x}_2+\cdots\lambda_n\mathsf{x}_n = 0\end{aligned}$$

puisque 0 est le seul élément appartenant au noyau de A

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

puisque les x_1, x_2,..., x_n sont linéairement indépendants.
On en déduit donc que $\mathsf{A}\mathsf{x}_1$, $\mathsf{A}\mathsf{x}_2$,..., $\mathsf{A}\mathsf{x}_n$ sont effectivement linéairement indépendants.

iii. (a) Par définition, l'adjointe de $\mathcal{A}:\mathtt{E}\to\mathtt{E}$ est l'application $\mathcal{A}^*:\mathtt{E}\to\mathtt{E}$ telle que, $\forall\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathtt{E}$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))$$

(b) L'application $\mathcal{A}$ est normale si elle commute avec son adjointe, c'est-à-dire si

$$\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\circ\mathcal{A}$$

(c) Par définition, l'adjointe de $\left(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}\right)$ est l'application $\left(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}\right)^*$ telle que, $\forall\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathtt{E}$,

$$\left(\left(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}\right)(\mathbf{x})|\mathbf{y}\right) = \left(\mathbf{x}|\left(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}\right)^*(\mathbf{y})\right)$$

Or, en transformant le membre de gauche, on a successivement, en utilisant la sesquilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\left(\left(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}\right)(\mathbf{x})|\mathbf{y}\right) &= (\mathcal{A}(\mathbf{x})-\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y})-\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y})\\ &= (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))-(\mathbf{x}|\overline{\alpha}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y})-\overline{\alpha}\mathbf{y})\\ &= \left(\mathbf{x}|\left(\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathfrak{I}\right)(\mathbf{y})\right)\end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\left(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}\right)^* = \left(\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathfrak{I}\right)$$

(d) L'application $(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})$ est normale si elle commute avec son adjointe. Or, on a d'une part

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})\circ(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})^* &= (\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})\circ(\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathfrak{I})\\ &= \mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{A}-\alpha\mathcal{A}^*+|\alpha|^2\mathfrak{I}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})^*\circ(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I}) &= (\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathfrak{I})\circ(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})\\ &= \mathcal{A}^*\circ\mathcal{A}-\alpha\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{A}+|\alpha|^2\mathfrak{I}\\ &= \mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*-\alpha\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{A}+|\alpha|^2\mathfrak{I}\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait que $\mathcal{A}$ est normale.
Dès lors,

$$(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})\circ(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})^* = (\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})^*\circ(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})$$

de sorte que $(\mathcal{A}-\alpha\mathfrak{I})$ est normale.

iv. (a) Si x et y désignent respectivement des matrices-colonnes de m et n éléments réels, x est de dimensions $(m\times 1)$ et y^T de dimensions $(1\times n)$ de sorte que la matrice $\mathsf{A}=\mathsf{x}\mathsf{y}^T$ est de dimensions $(m\times n)$.

(b) La matrice A^+ est la pseudo-inverse de la matrice A si

$$\begin{aligned}\mathsf{A}\mathsf{A}^+\mathsf{A} &= \mathsf{A}\\ \mathsf{A}^+\mathsf{A}\mathsf{A}^+ &= \mathsf{A}^+\\ (\mathsf{A}^+\mathsf{A})^* &= \mathsf{A}^+\mathsf{A}\\ (\mathsf{A}\mathsf{A}^+)^* &= \mathsf{A}\mathsf{A}^+\end{aligned}$$

Vérifions ces 4 égalités en tenant compte du fait que $\mathsf{A}=\mathsf{x}\mathsf{y}^T$ est réelle et que les adjointes peuvent donc être ici remplacées par les transposées.

- On a

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^+\mathsf{A}=\mathsf{x}\mathsf{y}^T\mathsf{y}\mathsf{x}^T\mathsf{x}\mathsf{y}^T=\mathsf{x}(\mathsf{y}^T\mathsf{y})(\mathsf{x}^T\mathsf{x})\mathsf{y}^T=\mathsf{x}\mathsf{y}^T=\mathsf{A}$$

puisque

$$\mathsf{x}^T\mathsf{x}=\sum_{i=1}^m x_i^2=1 \quad \text{et} \quad \mathsf{y}^T\mathsf{y}=\sum_{j=1}^m y_j^2=1$$

- De même,

$$\mathsf{A}^+\mathsf{A}\mathsf{A}^+=\mathsf{y}\mathsf{x}^T\mathsf{x}\mathsf{y}^T\mathsf{y}\mathsf{x}^T=\mathsf{y}(\mathsf{x}^T\mathsf{x})(\mathsf{y}^T\mathsf{y})\mathsf{x}^T=\mathsf{y}\mathsf{x}^T=\mathsf{A}^+$$

- Ensuite,

$$(\mathsf{A}^+\mathsf{A})^*=(\mathsf{A}^+\mathsf{A})^T=\mathsf{A}^T\mathsf{A}^{+T}=(\mathsf{x}\mathsf{y}^T)^T(\mathsf{y}\mathsf{x}^T)^T=\mathsf{y}\mathsf{x}^T\mathsf{x}\mathsf{y}^T=\mathsf{A}^+\mathsf{A}$$

- Et finalement,

$$(\mathsf{A}\mathsf{A}^+)^*=(\mathsf{A}\mathsf{A}^+)^T=\mathsf{A}^{+T}\mathsf{A}^T=(\mathsf{y}\mathsf{x}^T)^T(\mathsf{x}\mathsf{y}^T)^T=\mathsf{x}\mathsf{y}^T\mathsf{y}\mathsf{x}^T=\mathsf{A}\mathsf{A}^+$$

On en conclut que la matrice $\mathsf{A}^+=\mathsf{y}\mathsf{x}^T$ est bien la pseudo-inverse de la matrice A.

Question II

Le système à résoudre s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -a\\ 1 & 2 & -a\\ -1 & -a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 2a\\ -2-a\end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -a & a \\ 1 & 2 & -a & 2a \\ -1 & -a & 2 & -2-a \end{array}\right)$$

Commençons par échanger les deux premières lignes, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 2a \\ a & 1 & -a & a \\ -1 & -a & 2 & -2-a \end{array}\right)$$

Ensuite,

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - a\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 2a \\ 0 & 1-2a & -a+a^2 & a-2a^2 \\ 0 & 2-a & 2-a & a-2 \end{array}\right) \tag{$*$}$$

- Si $a \neq 2$, on continue l'échelonnage en divisant la troisième ligne par $2-a$ et en la permutant avec la deuxième ligne,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 2a \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-2a & -a+a^2 & a-2a^2 \end{array}\right)$$

  puis

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - (1-2a)\ell_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a-2 & 2a+2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+a-1 & -2a^2-a+1 \end{array}\right)$$

  Nous constatons que a^2+a-1 est nul si

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

  et que $-2a^2-a+1 \neq 0$ pour ces valeurs de a.

  - ◇ Si $a \in \{(-1+\sqrt{5})/2, (-1-\sqrt{5})/2\}$, le système est incompatible.
  - ◇ Si $a \notin \{2, (-1+\sqrt{5})/2, (-1-\sqrt{5})/2\}$, on continue l'échelonnage. On a successivement

$$\ell_3 \to \frac{\ell_3}{a^2+a-1} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a-2 & 2a+2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2a^2-a+1}{a^2+a-1} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + (a+2)\ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \ell_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a+2+(a+2)\left(\dfrac{-2a^2-a+1}{a^2+a-1}\right) = -\dfrac{a^2+a}{a^2+a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1-\dfrac{-2a^2-a+1}{a^2+a-1} = \dfrac{a^2}{a^2+a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2a^2-a+1}{a^2+a-1} \end{array}\right)$$

    La solution unique s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+a-1} \begin{pmatrix} -a^2-a \\ a^2 \\ -2a^2-a+1 \end{pmatrix} \tag{$\clubsuit$}$$

- Si $a=2$, la matrice $(*)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'échelonnage peut ensuite être poursuivi. On a successivement

$$\ell_2 \to -\ell_2/3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système possède donc la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{$\heartsuit$}$$

En conclusion,

- si $a \notin \{2, (-1+\sqrt{5})/2, (-1-\sqrt{5})/2\}$, la solution est donnée par (♣) ;
- si $a = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, le système est incompatible ;
- si $a = 2$, les solutions sont données par ($\heartsuit$).

Question III

La dissipation d'énergie est donnée par

$$(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{S}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$$

soit, matriciellement en exprimant les composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathcal{S}$ dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,

$$(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = \mathsf{E}^{\mathrm{T}}\mathsf{S}\mathsf{E}$$

Cette forme quadratique est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué si la matrice symétrique S représentant l'application linéaire $\mathcal{S}$ est définie positive.

Par le critère de Sylvester, applicable ici puisque la matrice S est symétrique, ce sera le cas si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de S sont strictement positifs, c'est-à-dire si

$$3\sigma_0 > 0$$

$$\sigma_0^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \beta \end{vmatrix} = \sigma_0^2(3\beta - 1) > 0$$

et

$$\operatorname{dtm} \mathsf{S} = \sigma_0^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \sigma_0^3(3\beta^2 - \beta - \beta) = \sigma_0^3\beta(3\beta - 2) > 0$$

Comme $\sigma_0 > 0$, ces conditions conduisent à

$$\beta > \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \beta \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

Ces conditions sont satisfaites simultanément et la dissipation d'énergie est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué si et seulement si $\beta > 2/3$.

Question IV

i. Si $k_1 = k_2 = k$, $a = b$ et $J = 2ma^2/3$, l'équation donnée s'écrit

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \dfrac{5m}{12} & \dfrac{m}{12} \\[2ex] \dfrac{m}{12} & \dfrac{5m}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega^2}{12} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{12k}{m\omega^2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Pour que cette équation admette des solutions non nulles (que le système vibre), il faut que $\lambda = 12k/m\omega^2$ soit une valeur propre de la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont les zéros de

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 6)(\lambda - 4)$$

La matrice A possède donc les deux valeurs propres 4 et 6 et les fréquences propres recherchées sont données par

$$\frac{12k}{m\omega_1^2} = 6 \quad \text{et} \quad \frac{12k}{m\omega_2^2} = 4$$

c'est-à-dire

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

ii. Les mouvements de la voiture relatifs aux deux fréquences propres sont donnés par les vecteurs propres correspondants.

◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 6$ de A sont les solutions w_1 non nulles de

$$(\mathsf{A} - 6\mathbb{I})\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système homogène peut être réduite à une forme échelonnée par des opérations élémentaires. Commençons par échanger les deux lignes de la matrice. On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis, poursuivant l'échelonnage,

$$\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}_0$$

Les vibrations à la fréquence propre ω_1 sont donc caractérisées par $X_1 = X_2$. L'avant et l'arrière de la voiture oscillent en phase de sorte que la voiture reste horizontale à tout instant.

◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 4$ de A sont les solutions w_2 non nulles de

$$(\mathsf{A} - 4\mathbb{I})\mathsf{w}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système homogène peut être réduite à une forme échelonnée par des opérations élémentaires. Il vient

$$\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R}_0$$

Les vibrations à la fréquence propre ω_2 sont donc caractérisées par $X_1 = -X_2$. L'avant et l'arrière de la voiture oscillent en opposition de phase de sorte que la voiture effectue un mouvement de balancier autour de son centre d'inertie.