Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2025

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE

ÉVALUATION FORMATIVE

- *Indiquez lisiblement votre nom et votre prénom en MAJUSCULES ainsi que votre matricule (format 2025...) aux emplacements prévus.*
- *Rédigez vos réponses aux questions dans les emplacements vides prévus à cet effet sur l'énoncé. Si vous manquez de place, terminez votre réponse sur une ou plusieurs pages que vous ajouterez **à la fin** du questionnaire. À l'endroit prévu, indiquez clairement en majuscules et dans un cadre que votre réponse continue sur une page supplémentaire. Sur cette page complémentaire indiquez le numéro de la question à laquelle se rapporte votre réponse.*
- *À l'endroit prévu sur la première page du document, indiquez que vous avez réalisé l'évaluation formative sans recourir à des outils d'intelligence artificielle générative. Seules les copies portant cet engagement seront corrigées.*
- *Soumettez vos copies (toutes les pages, dans l'ordre, même celles sur lesquelles vous n'auriez pas écrit) via Gradescope (www.gradescope.com) au plus tard pour **le 25 novembre à 8h00**.*

Question I

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \operatorname{tg} t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

i. Dans quel intervalle pouvez-vous assurer l'existence et l'unicité de la solution ? Justifiez.

ii. Déterminez la solution du problème différentiel dans cet intervalle.

Question II

Le cheveu humain possède une structure complexe dont les propriétés mécaniques sont essentiellement déterminées par les filaments de keratine-α qui le composent. Les études suggèrent que, pour de petites élongations du cheveu, ses propriétés en traction peuvent être décrites par la loi constitutive

$$\sigma = \alpha\, \dot{\varepsilon}^m \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

où $\sigma > 0$ désigne la force de traction exercée sur le cheveu, $\varepsilon(t)$ est son élongation, α est une constante strictement positive dépendant de la température et m est une constante appartenant à l'intervalle $[0.05, 0.1]$.

Déterminez l'élongation $\varepsilon(t)$ en fonction du temps si une force σ constante est appliquée sur le cheveu à partir d'une élongation nulle en $t = 0$.

SOLUTION TYPE

Question I

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=\operatorname{tg} t \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

Intervalle correct : 1 pt
Appel à la linéarité : 1 pt
Continuité des coefficients et du terme indépendant : 1 pt
Conditions de Cauchy : 1 pt
Conditions de Cauchy en $t=0\in \mathtt{I}$: 1 pt

i. L'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel sont garanties au moins sur l'intervalle $\mathtt{I}=]-\pi/2,\pi/2[$. En effet, d'une part, l'équation différentielle possède des solutions sur cet intervalle car elle est linéaire et que son écriture sous forme canonique fait apparaître des coefficients et un second membre continus sur $\mathtt{I}$. D'autre part, la solution est unique sur cet intervalle car l'équation est assortie de deux conditions auxiliaires données sous la forme de conditions de Cauchy en un point $t=0$ de l'intervalle.

Total i. : 5 pts

ii. L'équation

$$y''(t)+y(t)=\operatorname{tg} t$$

est une équation différentielle ordinaire du $2^{\text{ème}}$ ordre, linéaire, à coefficients constants et non homogène. L'équation étant linéaire, sa solution générale $y(t)$ est la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation non homogène.

Structure de la solution : 1 pt
Justification par la linéarité : 1 pt

Solution générale de l'équation homogène.

L'équation étant linéaire à coefficients constants, on considère le polynôme caractéristique associé z^2+1. Celui-ci s'annule en $z=i$ et en $z=-i$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

Polynôme caractéristique : 1 pt
Zéros du polynôme caractéristique : 1 pt
$y_h(t)$ sous forme réelle ou complexe : 2 pts

$$y_h(t)=C\,\mathrm{e}^{it}+D\,\mathrm{e}^{-it}$$

(où C et D sont des constantes) ou encore, sous forme réelle,

$$y_h(t)=A\cos t+B\sin t$$

où A et B sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène.

Puisque le second membre de l'équation n'est pas de la forme exponentielle-polynôme, on utilise la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière. En exploitant le système fondamental de solutions de l'équation homogène associée formé par les fonctions $y_1(t)=\cos t$ et $y_2(t)=\sin t$, on peut exprimer une solution particulière sous la forme

Principe de la variation des constantes : 1 pt

$$y_p(t)=\left(\int C_1(t)dt\right)y_1(t)+\left(\int C_2(t)dt\right)y_2(t)$$

où C_1 et C_2 vérifient le système d'équations

Système pour C_1 et C_2 : 2 pts

$$\begin{cases} C_1y_1+C_2y_2=0 \\ C_1y_1'+C_2y_2'=\operatorname{tg} t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} C_1\cos t+C_2\sin t=0 \\ -C_1\sin t+C_2\cos t=\operatorname{tg} t \end{cases}$$

En multipliant la première de ces équations par $\sin t$ et en lui ajoutant la seconde multipliée par $\cos t$, on obtient

Solution C_1, C_2 : 2 pts

$$C_2 = \sin t$$

et, de là,

$$C_1 = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} = -\frac{1-\cos^2 t}{\cos t} = -\frac{1}{\cos t} + \cos t$$

On calcule aisément

$$\int C_2(t)dt = \int \sin t\, dt = -\cos t$$

Primitives de C_1 et C_2 : 3 pts
Justification du choix de l'arcth vs arcoth ou signe de l'argument du logarithme : 1 pt

D'autre part, on a

$$\int C_1(t)dt = \int \left(-\frac{1}{\cos t} + \cos t\right) dt = -\int \frac{1}{\cos t} dt + \sin t$$

Le calcul de

$$P = \int \frac{1}{\cos t} dt$$

se fait en posant $\sin t = u$, ce qui permet de transformer P en

$$P = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{1-u^2} du$$

Puisque $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, $u = \sin t \in]-1,1[$ et on a alors directement

$$P = \operatorname{arcth}(u) = \operatorname{arcth}(\sin t)$$

de sorte que

$$\int C_1(t)dt = -\operatorname{arcth}(\sin t) + \sin t$$

En combinant les résultats ci-dessus, on obtient donc la solution particulière

$y_p(t)$ sous une forme ou l'autre : 1 pt

$$y_p(t) = \cos t\Big(-\operatorname{arcth}(\sin t) + \sin t\Big) - \sin t \cos t = -\cos t \operatorname{arcth}(\sin t)$$

Remarquons que P peut aussi se calculer par décomposition de l'intégrande en fractions simples. On a dans ce cas

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u} du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$$

où l'argument du logarithme est positif puisqu'on travaille sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Ceci conduit à

$$y_p(t) = -\frac{\cos t}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$$

Solution générale de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle est donc

Solution générale, sous une forme ou l'autre : 1 pt

$$y(t) = A\cos t + B\sin t - \cos t \operatorname{arcth}(\sin t)$$

qui peut aussi s'écrire

$$y(t) = A\cos t + B\sin t - \frac{\cos t}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$$

Solution du problème.

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes A et B.
D'une part, on obtient directement $0 = y(0) = A$ D'autre part, puisque

Constantes d'intégration : 2 pts

$$\begin{aligned} y'(t) &= B\cos t + \sin t \operatorname{arcth}(\sin t) - \cos^2 t \frac{1}{1-\sin^2 t} \\ &= B\cos t + \sin t \operatorname{arcth}(\sin t) - 1 \end{aligned}$$

on a $0 = y'(0) = B - 1$, ce qui donne $B = 1$.

Finalement, la solution du problème différentiel s'écrit

Solution finale : 1 pt

$$y(t) = \sin t - \cos t \operatorname{arcth}(\sin t)$$

ou

$$y(t) = \sin t - \frac{\cos t}{2} \ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$$

Total ii. : 20 pts
TOTAL QI : 25 PTS

Question II

L'équation différentielle

$$\sigma = \alpha \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^m \varepsilon$$

peut s'écrire

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\sigma}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}$$

La division par ε intervenant dans cette réécriture ne fait pas apparaitre de solution singulière puisque $\varepsilon = 0$ ne vérifie pas l'équation donnée si $\sigma > 0$.

Gestion de ε=0 : 1 pt

Remarquons également que le calcul de la puissance généralisée d'exposant $1/m$ demande que ε soit positif. On pourra vérifier ceci en fin de calcul. Cependant, on peut aussi observer que le facteur $\dot{\varepsilon}^m$ apparaissant dans l'équation initiale n'a de sens que si $\dot{\varepsilon} > 0$, *i.e.* si ε croit au cours du temps. Partant de $\varepsilon(0) = 0$, ceci implique que $\varepsilon(t) > 0$ aux instants ultérieurs.

Il s'agit d'une équation à variables séparables. On a

Séparation des variables : 2 pts

$$\varepsilon^{\frac{1}{m}}\, d\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} dt$$

de sorte que

Primitives : 2 pts
Présence d'une constante : 1 pt

$$\int \varepsilon^{\frac{1}{m}}\, d\varepsilon = \int \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} dt + C$$

et

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} t + C$$

La constante C peut être déterminée en tenant compte de la condition initiale $\varepsilon(0) = 0$, soit $C = 0$.

Détermination de la constante : 1 pt

Finalement, on obtient

Expression explicite de $\varepsilon(t)$: 2 pts

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1+m}{m}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} t\right]^{\frac{m}{1+m}}$$

Comme attendu, cette solution existe et est strictement positive pour tout $t > 0$.

TOTAL QII : 9 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.

- La linéarité de l'équation différentielle constitue une hypothèse essentielle du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Cette hypothèse doit être invoquée pour en justifier l'application.
- La continuité des coefficients et du terme indépendant de cette équation du second ordre sur les intervalles du type

  $$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

  assure l'existence de solutions deux fois continûment dérivables sur ces intervalles.

  Le théorème d'existence et d'unicité ne permet cependant d'assurer l'unicité de la solution que sur l'intervalle contenant le point t_0 où des conditions de Cauchy sont imposées. Puisque de telles conditions sont imposées en $t_0 = 0$, les résultats théoriques permettent d'affirmer que la solution existe et est unique sur $\mathtt{I} =]-\pi/2, \pi/2[$.

  On notera que le théorème d'existence et d'unicité s'applique sur un seul intervalle et non pas sur un ensemble du type $\mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Celui-ci n'est pas un intervalle mais une union d'intervalles.

ii.

- Il est indispensable de vérifier les hypothèses permettant l'utilisation des différentes méthodes.

  La linéarité de l'équation permet d'exprimer la solution générale comme somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

  La méthode du polynôme caractéristique peut être utilisée pour rechercher la solution générale de l'équation homogène car l'équation est linéaire à coefficients constants.
- Le second membre de l'équation n'étant pas de la forme exponentielle-polynôme et la forme d'une solution particulière n'étant pas du tout évidente à deviner, c'est la méthode de variation des constantes qu'il convenait d'appliquer. Celle-ci est toujours applicable pour déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre n dont on a préalablement déterminé n solutions fondamentales de l'équation homogène correspondante.
- Le calcul de la primitive de $1/\cos t$ a posé problème à de nombreux étudiants. En posant $\sin t = u$ (puisque l'intégrande est impair en $\cos t$), la primitive à calculer se transforme en

  $$\int \frac{du}{1-u^2}$$

  et peut être calculée en décomposant l'intégrande en fractions simples. Il est cependant encore plus direct de reconnaitre en $1/(1-u^2)$ la dérivée des fonctions arcth et arcoth.
- Le choix de la fonction arcth, et pas arcoth qui possède la même dérivée, est dicté par le fait que $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ et donc $u = \sin t \in]-1, 1[$ sur lequel la fonction arcth est définie, contrairement à l'arcoth.

  De même, si la solution est exprimée au moyen de la fonction ln suite à la décomposition de l'intégrande en fractions simples, il faut vérifier que l'argument du logarithme est positif pour $u = \sin t \in]-1, 1[$ et donner une solution sans valeur absolue.

Question II

La question II a donné lieu à peu d'erreurs.

On remarquera néanmoins que la séparation des variables conduit à faire passer la fonction inconnue ε au dénominateur de l'expression considérée, ce qui doit toujours s'accompagner de la vérification qu'une telle division est licite ou, à défaut, de l'identification d'une solution singulière. En l'espèce, le problème ne peut accepter de solution $\varepsilon(t)$ s'annulant identiquement sur $]0,+\infty[$. Il ne possède donc pas de solution singulière.