LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2024

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de trois heures.

Question I

i. Démontrez que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y$$

ii. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall M > 0)(\exists x \geq M) : |f(x) - 2| \leq \varepsilon$$

Peut-on alors affirmer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$? Justifiez.

iii. Peut-on affirmer que si $f \sim \frac{1}{x}$ pour $x \to +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{1}{x} \right] = 0$?

iv. Montrez, en justifiant et en introduisant les hypothèses minimales sur la continuité et la dérivabilité des fonctions b et f permettant cette justification, que

$$\frac{d}{dx} \int_0^{b(x)} f(y)dy = f[b(x)]b'(x)$$

où, pour simplifier les écritures, on supposera que b est une fonction strictement positive sur son domaine de définition.
En supposant que les fonctions a, b et f vérifient des hypothèses appropriées (qui ne doivent pas être précisées), déduisez-en l'expression de

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy$$

Question II

Dans son ouvrage intitulé *'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes'* et publié en 1696, le marquis Guillaume François Antoine de l'Hospital considère, entre autres, la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

où $a > 0$ désigne un paramètre réel.

i. Déterminez des constantes C_1 et α telles que $f(x) \sim C_1 x^\alpha$ pour $x \to 0^+$.

ii. Déterminez des constantes C_2 et β telles que $f(x) \sim C_2(a-x)^\beta$ pour $x \to a^-$.

Question III

On considère la fonction

$$f(x) = \operatorname{arcth} \frac{x}{x-1}$$

i. Pour quelles valeurs de x peut-on appliquer la formule de Taylor à la fonction f au voisinage de $a = -1$ à un ordre n quelconque ? Justifiez.

ii. Déterminez l'expression du polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ et du reste $\mathcal{R}_2(x)$ au voisinage de $a = -1$.

iii. Montrez que la formule de Taylor au voisinage de $a = -1$ peut être écrite à un ordre n quelconque sous la forme

$$\operatorname{arcth} \frac{x}{x-1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} g(k)(x+1)^k + \mathcal{R}_n(x)$$

où la constante a_0 et les expressions de la fonction $g(k)$ et du reste $\mathcal{R}_n(x)$ sont à déterminer.

iv. Déterminez un polynôme en $(x+1)$ permettant d'approcher $f(x)$ sur l'intervalle $[-1.1, -1]$ avec une erreur inférieure à 10^{-5}. Justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

i. On a

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}\right] \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \operatorname{sh}(x+y)
\end{aligned}$$

Connaissance des définitions de sh *et* ch *: 2 pts*
Calculs : 2 pts
Total i. : 4 pts

Les réponses aux items ii. et iii., même correctes, données sans justification ne donnent droit à aucun point.

ii. Non, on ne peut pas l'affirmer.
Considérons par exemple la fonction $f(x) = 2 + \sin x$. Quels que soient ε et M, on pourra toujours trouver $x = k\pi \geq M$, $k \in \mathbb{Z}$, tel que $\sin x = 0$ et donc $|f(x) - 2| = 0 \leq \varepsilon$.
Cependant, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \sin x)$ n'existe pas.

Faux car mauvais quantificateurs : max 1 pt sur 4
Contre-exemple correct : 2 pts
Vérification de l'hypothèse : 1 pt
Négation de la thèse : 1 pt
Total ii. : 4 pts

iii. Oui, on peut l'affirmer.
La fonction $1/x$ ne s'annulant pas au voisinage de $+\infty$, le comportement asymptotique $f \sim \frac{1}{x}$, $(x \to +\infty)$ se traduit par

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 1 \quad \text{soit} \quad \lim_{x \to +\infty} \left[x f(x)\right] = 1$$

Sur base de ce résultat, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x f(x) - 1}{x} = 0$$

Traduction du comportement asymptotique en terme de limite : 2 pts dont 1 pt pour la justification

Démonstration : 2 pts
Total iii. : 4 pts

iv. L'expression intégrale proposée

$$\int_0^{b(x)} f(y)\, dy$$

peut être considérée comme la composition $F[b(x)]$ de la fonction

$$F(u) = \int_0^u f(y)\, dy \quad \text{telle que} \quad F'(u) = f(u)$$

Appel au théorème de dérivation des fonctions composées : 1 pt
$F' = f$: 0.5 pt

(F est une primitive de f) et de la fonction $b(x)$ définissant la borne supérieure de l'intégrale. Par application du théorème de dérivation des fonctions composées, il vient dès lors

$$\frac{d}{dx}\int_0^{b(x)} f(y)dy = \frac{d}{dx}F\left[b(x)\right] = F'[b(x)]b'(x) = f[b(x)]b'(x)$$

Le théorème de dérivation des fonctions composées demande que la fonction b soit (réelle et) dérivable au point x et que la fonction F soit dérivable au point $b(x)$ correspondant. Cette seconde hypothèse est vérifiée si f est continue sur $[0, b(x)]$, ce qui assure également que F soit une primitive de f.

Dérivabilité de b : 1 pt

Continuité de f : 1 pt

Gestion des domaines de dérivabilité et continuité : 0.5 pt

Puisque

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(y)\,dy = \int_0^{b(x)} f(y)\,dy - \int_0^{a(x)} f(y)\,dy$$

Séparation de l'intégrale en deux parties : 1 pt

le résultat précédent peut être généralisé sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy &= \frac{d}{dx}\int_0^{b(x)} f(y)\,dy - \frac{d}{dx}\int_0^{a(x)} f(y)\,dy \\ &= f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)\end{aligned}$$

Généralisation correcte : 1 pt

Total iv. : 6 pts

TOTAL QI : 18 PTS

Question II

i. On calcule aisément $f(0) = 0$, ce qui ne permet pas de préciser le comportement asymptotique au voisinage de $x = 0$.

On détermine alors les termes dominants du numérateur et du dénominateur, *i.e.*

$$\begin{cases} \sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x} \sim -a\sqrt[3]{a^2x} \\ a - \sqrt[4]{ax^3} \sim a \end{cases} \qquad (x \to 0^+)$$

Termes dominants du numérateur et du dénominateur : 3 pts

de sorte que

Conclusion : 2 pts

$$f(x) \sim \frac{-a\sqrt[3]{a^2x}}{a} = -\sqrt[3]{a^2x} = C_1 x^{\alpha}, \qquad (x \to 0^+)$$

avec $C_1 = -\sqrt[3]{a^2}$ et $\alpha = 1/3$.

Total i. : 5 pts

ii. On calcule

$$\lim_{x \to a^-} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Constat de l'indétermination : 1 pt

Pour lever l'indétermination, on a recours au théorème de l'Hospital. En dérivant les numérateur et dénominateur, il vient

Valeur de la limite : 2 pts

$$\lim_{x \to a^-} \frac{(1/2)(2a^3x - x^4)^{-1/2}(2a^3 - 4x^3) - (1/3)a^{5/3}x^{-2/3}}{-(3/4)a^{1/4}x^{-1/4}} = \frac{-(4/3)a}{-(3/4)} = \frac{16}{9}a$$

Dès lors,

Conclusion : 2 pts

$$f(x) \sim \frac{16}{9}a = C_2(a - x)^{\beta}, \qquad (x \to a^-)$$

avec $C_2 = 16a/9$ et $\beta = 0$.

Total ii : 5 pts

TOTAL QII : 10 PTS

Question III

i. La fonction

$$f(x) = \operatorname{arcth}\frac{x}{x-1}$$

est réelle et indéfiniment continument dérivable sur l'ensemble des x tels que

f réelle : 1 pt

$f \in C_\infty(]-\infty,1/2[)$: 1.5 pts

$$x \neq 1 \quad \text{et} \quad -1 < \frac{x}{x-1} < 1$$

Si $x > 1$, ceci implique $-x+1 < x < x-1$ c'est-à-dire $1 < 2x < 2x-1$, qui est impossible.

Si $x < 1$, ceci implique $-x+1 > x > x-1$ c'est-à-dire $1 > 2x > 2x-1$ d'où $x < 1/2$.

Ainsi, $f(x)$ est indéfiniment continument dérivable sur l'intervalle $]-\infty,1/2[$ contenant le point $a=-1$. On peut donc écrire la formule de Taylor pour la fonction f à l'ordre n quelconque au voisinage de $a=-1$ pour tout $x \in]-\infty, 1/2[$.

$x \in]-\infty, 1/2[$: 1 pt

Total i. : 3.5 pts

ii. La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

Expression de $\mathcal{P}_2$ citée ou mise en pratique : 2 pts

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

avec

Expression de $\mathcal{R}_2$ citée ou mise en pratique : 2 pts (dont 1 pt pour l'info. sur ξ)

$$\mathcal{P}_2(x) = f(-1) + (x+1)f'(-1) + \frac{(x+1)^2}{2}f''(-1)$$

et

$$\mathcal{R}_2 = \frac{(x+1)^3}{6}f'''(\xi) \quad \text{où} \quad \xi \in]-1,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,-1[\text{ si } x<-1)$$

On calcule successivement

$$f(x) = \operatorname{arcth}\frac{x}{x-1}, \qquad f(-1) = \operatorname{arcth}\frac{1}{2}$$

Expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$: 1 pt

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2}\,\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2x-1}, \qquad f'(-1) = -\frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}, \qquad f''(-1) = -\frac{2}{9}$$

de sorte que le polynôme de Taylor est

Expression de $\mathcal{P}_2(x)$: 1 pt

$$\mathcal{P}_2(x) = \operatorname{arcth}\frac{1}{2} - \frac{x+1}{3} - \frac{(x+1)^2}{9}$$

La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

Expression de $f'''(x)$: 0.5 pt

$$f'''(x) = \frac{(-2)^2 2}{(2x-1)^3} = \frac{8}{(2x-1)^3}$$

de sorte que

Expression correcte de $\mathcal{R}_2(x)$ avec ξ : 1 pt

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{4}{3(2\xi-1)^3}(x+1)^3 \quad \text{où} \quad \xi \in]-1,x[\quad (\text{ou }]x,-1[)$$

Total ii : 7.5 pts

iii. Le polynôme de Taylor à l'ordre n au voisinage de $x=-1$ s'écrit

$$\mathcal{P}_n(x) = f(-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x+1)^k}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(-1)$$

On a déjà calculé

$$f'(x) = \frac{1}{2x-1}$$
$$f''(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{(-2)^2 2}{(2x-1)^3}$$

On a aussi

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-2)^3 3\cdot 2}{(2x-1)^4}$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{(-2)^4 4\cdot 3\cdot 2}{(2x-1)^5}$$

et, en généralisant,

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{(-2)^{k-1}(k-1)!}{(2x-1)^k}$$

Expression générale des dérivées : 2 pts

Au point $x=-1$, nous avons

$$f(-1) = \operatorname{arcth}\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d^k f}{dx^k}(-1) = \frac{(-2)^{k-1}(k-1)!}{(-3)^k} = -\frac{2^{k-1}(k-1)!}{3^k}$$

et le polynôme de Taylor prend la forme

$$\mathcal{P}_n = \operatorname{arcth}\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x+1)^k}{k} \frac{2^{k-1}}{3^k}$$

Ceci correspond à la forme proposée avec

$$a_0 = \operatorname{arcth}\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(k) = -\frac{2^{k-1}}{k\,3^k}$$

Valeur de a_0 : 1 pt
Expression de $g(k)$: 1 pt

Le reste s'écrit, avec $\xi \in]-1, x[$ (ou $]x,-1[$),

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(-2)^n n!}{(2\xi-1)^{n+1}} = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \frac{(-2)^n}{(2\xi-1)^{n+1}}$$

Expression du reste 2 pts, dont 1 pt pour la localisation de ξ

Total iii. : 6 pts

iv. Si $x \in [-1.1, -1]$, $\xi \in]-1.1, -1[$ et, en donnant la plus grande valeur possible au numérateur et la plus petite au dénominateur,

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{|-1.1+1|^{n+1}}{n+1} \frac{2^n}{|2\cdot(-1)-1|^{n+1}}$$

soit

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{2^n}{n+1} \frac{1}{30^{n+1}}$$

Majoration du reste sur $[-1.1, -1]$: 1 pt

Recherchons la plus petite valeur de n pour laquelle le majorant est inférieur à 10^{-5}, c'est-à -dire n vérifiant

$$\frac{n+1}{2^n} 30^{n+1} > 100000$$

Pour $n = 2$, le premier membre vaut

$$\frac{3}{4}\,30^3 = \frac{3}{4} \times 27000 < 100000$$

Pour $n = 3$, le premier membre vaut

$$\frac{4}{8}\,30^4 = \frac{1}{2} \times 810000 > 100000$$

En conclusion, le développement de Taylor à l'ordre 3 approche $f(x)$ sur l'intervalle $[-1.1, -1]$ avec une erreur inférieure à 10^{-5}.
Le polynôme correspondant s'écrit

$$\mathcal{P}_3(x) = \operatorname{arcth}\frac{1}{2} - \frac{x+1}{3} - \frac{(x+1)^2}{9} - 4\frac{(x+1)^3}{81}$$

Identification de l'ordre n approprié : 1 pt
Polynôme : 1 pt

Total iv. : 3 pts
TOTAL QIII : 20 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i. -

ii. (a) De très nombreux étudiants et étudiantes n'identifient pas les différences entre la définition de la limite et la proposition donnée. Ils déclarent donc que cette proposition

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall M \geq 0)(\exists x \geq M) : |f(x) - 2| \leq \varepsilon$$

est équivalente à la définition de la limite

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq 0)(\forall x \geq M) : |f(x) - 2| \leq \varepsilon$$

et donc que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Cette erreur résulte visiblement d'une lecture trop rapide de la proposition ou d'une absence de prise de conscience de la différence fondamentale entre les quantificateurs universel ($\forall$) et existentiel ($\exists$). Ces deux quantificateurs ne sont absolument pas interchangeables. Il convient donc de lire très attentivement les énoncés en portant une attention particulière à la nature de ces quantificateurs et à leur place dans la proposition.

(b) Comme la définition de la limite, la proposition soumise dans l'énoncé considère la possibilité de rendre la différence $|f(x) - 2|$ plus petite que n'importe quel ε positif. Cependant, là où la définition de la limite suppose que cette majoration est acquise pour tous les x plus grands qu'une constante M (dépendant de ε), la proposition de l'énoncé ne demande la vérification d'une telle majoration que pour certains x. Certes, puisqu'il est censé exister un tel $x \geq M$ pour tout $M \geq 0$, on parle ici aussi d'une infinité de valeurs de x, mais on ne considère pas le même ensemble de valeurs de x que dans la définition de la limite. C'est cette différence qui explique pourquoi la proposition de l'énoncé ne permet pas d'établir la valeur de la limite.

(c) Certains considèrent à tort que la proposition n'est pas valide car elle ne limite pas le raisonnement aux seuls x appartenant au domaine de définition de la fonction f. Ici encore, une lecture attentive de la proposition aurait permis d'éviter l'erreur puisque la question parlait d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, *i.e.* dont le domaine de définition s'étend à toute la droite réelle. L'expression $\forall x \in \operatorname{dom} f$ apparaissant dans la définition complète de la limite n'apporte donc aucune limitation du propos.

(d) Il ne suffit pas d'identifier les différences entre la proposition et la définition de la limite pour invalider l'implication proposée dans l'énoncé. Les conditions définies dans cet énoncé pourraient permettre de démontrer que la limite des valeurs de f en $+\infty$ est égale à 2. Pour montrer que cette implication n'est pas vraie, il convient de présenter un contre-exemple mettant en scène une fonction f qui vérifie les conditions de l'énoncé mais dont la limite en l'infini n'est pas égale à 2.

La discussion ci-dessus permet de guider la recherche d'un contre-exemple. Il convient de trouver une fonction qui passe une infinité de fois par la valeur 2, ce qui permet de rencontrer les conditions de l'énoncé, mais dont les valeurs ne se stabilisent pas autour de 2 lorsque x tend vers l'infini, ce qui permet de nier le conséquent de l'implication. La fonction $f(x) = 2 + \sin x$ présentée dans la solution type rencontre ces conditions. On peut aussi penser, par exemple, à une fonction du type $f(x) = 2\cos x$.

Quand on introduit un contre-exemple, il convient de montrer scrupuleusement, d'une part, que celui-ci rencontre les conditions de l'énoncé et, d'autre part, qu'il est en contradiction avec la thèse.

iii. (a) Les réponses à cette question font assez fréquemment apparaître des problèmes de logique.

Le raisonnement demandé impliquait de s'appuyer sur l'hypothèse $f(x) \sim 1/x$ au voisinage de l'infini pour montrer que la limite proposée est nulle. Or, on constate que de trop nombreuses réponses visent à déterminer les conditions sous lesquelles deux fonctions sont asymptotiques l'une à l'autre. Ceci implique un raisonnement inverse à celui qui était attendu. Quand on démontre une proposition, il faut être attentif à identifier clairement les hypothèses sur lesquelles on peut/doit s'appuyer et la thèse à démontrer.

Dans d'autres cas, les problèmes de logique se manifestent pas une successions d'expressions mathématiques qui ne sont pas reliées l'une à l'autre, ou qui font apparaître des expressions intermédiaires qui interrompent le fil de l'argumentation. Quand on présente un raisonnement, chaque ligne/expression doit être reliée à la précédente par un lien logique et une justification appropriée.

(b) Les réponses font très souvent apparaître de très importants problèmes d'écriture et de notations. En particulier, on sera attentif à ne pas confondre ou mélanger de façon incohérente les notions de comportement asymptotique et de limite.

La relation $\sim$ exprime une équivalence entre deux fonctions dans un certain voisinage. On peut dès lors, par exemple, écrire $f(x) \sim 1/x$ au voisinage de l'infini. Ceci ne signifie pas que les deux fonctions sont égales. On ne peut donc écrire $f(x) = 1/x$ dans ce voisinage, et encore moins en $x = +\infty$. L'infini n'est pas un nombre.

Une limite, par contre, est un nombre (ou éventuellement est infinie). Une limite ne peut donc être égalée à une fonction. Une expression du type $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1/x$ ne pourra jamais être correcte. Le membre de gauche est un nombre alors que c'est une fonction de x qui apparaît à droite.

(c) La relation $f \sim g$ au voisinage de l'infini peut se traduire par

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

L'expression du comportement asymptotique au moyen d'une telle limite ne constitue cependant pas la définition général de $f \sim g$. Elle n'est valable que s'il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel g ne s'annule pas, de sorte que le rapport f/g peut être formé dans ce voisinage. Ceci ne pose pas de problème en l'espèce puisque $g(x) = 1/x$ ne s'annule pas au voisinage de l'infini. L'implication

$$f(x) \sim \frac{1}{x}, \qquad (x \to +\infty) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 1$$

est donc correcte mais doit être justifiée par la mention du fait que la fonction $1/x$ ne s'annule pas au voisinage de l'infini.

La traduction de $f(x) \sim 1/x$ au voisinage de l'infini par

$$f(x) - \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (x \to +\infty)$$

n'implique pas d'hypothèse supplémentaire.

(d) La limite d'un quotient est égale au quotient des limites pour autant que les limites du numérateur et du dénominateur existent et sont finies et que la limite du dénominateur est non nulle. Dès lors,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 1 \qquad \not\Rightarrow \qquad \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x} = 1$$

Ce raisonnement ne peut donc être invoqué pour d'établir que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Le résultat est cependant bel et bien vrai, ce qui peut être établi en considérant

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left\{ [xf(x)]\frac{1}{x} \right\} = \lim_{x\to+\infty} [xf(x)] \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

puisque les limites existent et sont finies.

(e) De la même façon, la limite d'une différence n'est égale à la différence des limites que si chacune des limites existe et est finie. Sans vérifier cette condition, on ne peut dès lors écrire que

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

Cette vérification est essentielle car c'est elle qui permet d'établir le résultat attendu malgré son caractère exceptionnel. En général, on a en effet

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \to +\infty) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) \qquad \not\Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

Par exemple, si on considère les fonctions $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ et $g(x) = \mathrm{e}^x$, on a bien

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + x}{\mathrm{e}^x} = 1 \qquad \text{de sorte que} \qquad \mathrm{e}^x + x \sim \mathrm{e}^x, \qquad (x \to +\infty)$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to+\infty} x \neq 0$$

iv. (a) Le calcul de l'intégrale ne pose pas de problème particulier quand on exprime celle-ci sous la forme de la variation d'une primitive. Cependant, on relève de fréquentes imprécisions au niveau des notations : une fonction F ou g est introduite dans le raisonnement sans en préciser la nature qu'il faut donc deviner. Dans tout développement, si une nouvelle fonction ou une nouvelle variable est introduite, il faut la définir clairement.

(b) Les réponses font également apparaître une utilisation abusive du symbole de bi-implication $\Leftrightarrow$. Ce symbole peut être placé entre deux propositions équivalentes. L'expression $A \Leftrightarrow B$ indique que la proposition A implique B et que, inversement, B implique A.

D'une part, la bi-implication ne peut être utilisée entre deux lignes d'un raisonnement logique que si les implications fonctionnent réellement dans les deux sens.

D'autre part, la bi-implication ne peut se substituer au symbole d'égalité. On ne peut écrire, par exemple

$$\int_0^{b(x)} f(y)dy \qquad \Leftrightarrow \qquad F[b(x)] - F[0]$$

(où F désigne une primitive de f) car les deux expressions apparaissant de part et d'autre de $\Leftrightarrow$ ne sont pas des propositions, *i.e.* des expressions qui peuvent être vraies ou fausses (et dont les valeurs logiques seraient identiques). Dans ce contexte, il convient simplement d'écrire

$$\int_0^{b(x)} f(y)dy = F[b(x)] - F[0]$$

(c) La gestion des hypothèses sur f et b est souvent très inappropriée. Les hypothèses permettant de justifier le résultat, quand elles sont présentes dans la solution, sont très souvent introduites sans aucune justification, de façon très artificielle, sans lien avec le raisonnement suivi. Les hypothèses doivent être introduites là où on en a besoin, soit pour qu'une expression mathématique ait du sens, soit pour justifier une articulation logique, soit pour pouvoir appliquer un théorème (en introduisant les hypothèses correspondantes).

Ici, on introduit l'hypothèse de continuité de la fonction f pour pouvoir justifier l'existence de l'intégrale. La dérivabilité, et encore moins la continue dérivabilité, ne sont pas utiles. Il faut aussi préciser l'intervalle sur lequel la continuité de la fonction f est attendue.

En examinant la propriété à démontrer, on peut aussi identifier le besoin d'une hypothèse de dérivabilité de la fonction b, puisque la propriété fait apparaître b'.

Pour que ces conditions constituent les hypothèses minimales permettant de justifier la formule donnée, il faut encore qu'elles permettent de justifier toutes les étapes de la démonstration, en particulier l'application du théorème d'existence des primitives et du théorème de dérivation des fonctions composées.

Question II

i.
- Il convient d'utiliser les notations appropriées. En particulier, il ne faut pas utiliser le signe d'égalité à la place de celui indiquant un comportement asymptotique. On a ici

$$f(x) \sim -\sqrt[3]{a^2x}, \quad (x \to 0^+)$$

et pas

$$f(x) = -\sqrt[3]{a^2x}, \quad (x \to 0^+)$$

- De même, il faut toujours indiquer le voisinage dans lequel le comportement asymptotique est valable. On doit écrire

$$f(x) \sim -\sqrt[3]{a^2x}, \quad (x \to 0^+)$$

et pas

$$f(x) \sim -\sqrt[3]{a^2x}$$

- Dans cet exercice, la limite de l'expression donnée est nulle et ne peut donc pas être assimilée à un comportement asymptotique.

- Afin d'établir un comportement asymptotique au voisinage de 0 ou de l'infini d'une expression fractionnaire ne faisant intervenir que des puissances, on peut déterminer les termes dominants du numérateur et du dénominateur de la fraction et ne conserver que ceux-ci. On se rappellera, qu'au voisinage de 0, les plus petites puissances dominent les plus grandes puissances. Au voisinage de l'infini, par contre, ce sont les plus grandes puissances qui dominent.

ii. La limite de la fonction quand x tend vers a donne lieu à une indétermination du type $0/0$ qui peut être levée en utilisant le théorème de l'Hospital. De bien trop nombreuses erreurs de dérivation ont été constatées lors de l'application de ce théorème.

Question III

i. Toute application de la formule de Taylor demande d'en vérifier les hypothèses. Il convient d'abord d'identifier les caractéristiques d'existence, de continuité et de dérivabilité de la fonction donnée. Ce n'est qu'ainsi qu'il est possible de déterminer ensuite sur quel domaine la fonction vérifie les hypothèses de la formule de Taylor. Il ne suffit pas de déterminer le domaine de f. Ici, il fallait aussi préciser que f est réelle et indéfiniment continument dérivable sur l'intervalle $]-\infty,1/2[$ contenant le point $a=-1$ au voisinage duquel la formule doit être appliquée. Il ne fallait pas non plus s'arrêter à cette constatation. Il fallait encore répondre à la question posée, à savoir pour quels x la formule de Taylor peut être appliquée à un ordre n quelconque.

ii. La dérivée troisième de la fonction f intervenant dans l'expression du reste de la formule de Taylor à l'ordre 2 doit être évaluée en un point ξ (et pas en $x=-1$ comme les dérivées intervenant dans le polynôme de Taylor). Il convient de préciser la localisation de ξ. Ici, on a

$$\mathcal{R}_2 = \frac{(x+1)^3}{6} f'''(\xi) \quad \text{où} \quad \xi \in]-1,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,-1[\text{ si } x<-1)$$

iii. Il était demandé dans cet item d'écrire la formule générale de Taylor à l'ordre n. Pour cela, on attendait la détermination du terme constant a_0 et de la fonction $g(k)$. Il ne suffisait pas de donner la formule

$$g(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}(-1)$$

Il fallait déterminer l'expression de la dérivée k-ième en $x=-1$ en fonction de k. Cette forme générale pouvait être déduite du calcul des premières dérivées.

iv. La majoration du reste est obtenue en rendant le numérateur le plus grand possible en valeur absolue et le dénominateur le plus petit possible en valeur absolue. Ensuite, l'ordre du polynôme recherché est le plus petit ordre qui permet que cette majoration soit inférieure à 10^{-5}. On sera attentif à écrire

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{2^n}{n+1}\frac{1}{30^{n+1}}$$

et pas

$$|\mathcal{R}_n(x)| = \frac{2^n}{n+1}\frac{1}{30^{n+1}}$$