Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2024

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures.

Question I

La chute d'un objet dans le champ de la pesanteur peut être décrite par l'équation

$$\frac{dv}{dt} = -g + kv^2$$

où $v(t)$ désigne la vitesse du corps à l'instant t, g est l'accélération de la pesanteur et k est une constante strictement positive tenant compte du freinage par l'air.

i. Déterminez $v(t)$ si l'objet est abandonné sans vitesse, c'est-à-dire si $v(0) = 0$.

ii. Déterminez la vitesse limite de chute définie par $\lim_{t\to+\infty} v(t)$.

Question II

i. Déterminez la solution générale de l'équation

$$y'''(x) + 16y'(x) = 1 + \cos x$$

ii. Si on adjoint à cette équation différentielle les conditions auxiliaires

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

et que l'on tente de résoudre le problème différentiel ainsi formé en utilisant le logiciel mathématique de calcul symbolique *Mathematica*, le message suivant est obtenu :

> "*For some branches of the general solution, the given boundary conditions lead to an empty solution.*"

Justifiez l'apparition de ce message. Ce résultat est-il en accord avec la théorie ?

Question I

i. L'équation

$$\frac{dv}{dt} = -g + kv^2$$

est une équation différentielle à variables séparables. Sa solution générale peut être obtenue en évaluant

$$\int \frac{dv}{-g+kv^2} = \int dt + C \qquad (\heartsuit)$$

Méthode de résolution : 2 pts

où C est une constante.

Remarquons que les solutions $v = \pm\sqrt{g/k}$ sont perdues lors de cette réécriture de l'équation. Ces solutions singulières ne sont cependant pas des solutions du problème posé puisqu'elles ne vérifient pas la condition initiale $v(0) = 0$.

Écartement des solutions singulières : 1 pt

En évaluant les primitives dans ($\heartsuit$), on obtient

$$\int \frac{dv}{-g+kv^2} = -\frac{1}{g}\int \frac{dv}{1-\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{kg}}\,\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right) = t + C$$

Solution générale implicite : 3 pts, dont 1 pt pour la justification du choix de l'arcth

où le choix de la primitive ($\operatorname{arcth} y$ et pas $\operatorname{arcoth} y$) de la fonction $1/(1-y^2)$ avec $y = v\sqrt{k/g}$ est dicté par la condition auxiliaire qui amène à considérer les variations de y dans un intervalle comprenant l'origine.

La solution du problème est obtenue en imposant que $v(0) = 0$, ce qui donne $C = 0$ et, finalement,

Constante d'intégration : 1 pt

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\operatorname{th}\left(-\sqrt{kg}\,t\right) = -\sqrt{\frac{g}{k}}\,\operatorname{th}\left(\sqrt{kg}\,t\right)$$

Solution explicite du problème : 2 pts

De façon alternative, la primitivation par rapport à v peut être réalisée en décomposant l'intégrande en fractions simples. On a

$$\frac{dv}{1-\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{dv}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v} + \frac{1}{2}\,\frac{dv}{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}$$

de sorte que

$$\int \frac{dv}{1-\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\ln\left|1-\sqrt{\frac{k}{g}}v\right| + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\ln\left|1+\sqrt{\frac{k}{g}}v\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v}\right|$$

On obtient alors

$$-\frac{1}{2\sqrt{kg}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v}\right| = t + C$$

La solution du problème est obtenue en imposant que $v(0) = 0$, ce qui donne $C = 0$, c'est-à-dire

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v}\right| = -2\sqrt{kg}\,t$$

Puisque la solution du problème est valable pour $\sqrt{\frac{k}{g}}v \in]-1,1[$ vu la condition auxiliaire $v(0) = 0$, on obtient

Même répartition des points que dans la méthode rapide avec le pt de l'arcth attribué ici si le signe de l'argument du logarithme est justifié

$$\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v} = \mathrm{e}^{-2\sqrt{kg}\,t}$$

soit

$$1+\sqrt{\frac{k}{g}}v = \left(1-\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)\mathrm{e}^{-2\sqrt{kg}\,t}$$

et, finalement,

Solution exprimée au moyen de th *pas attendue si méthode alternative*

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{kg}\,t}-1}{\mathrm{e}^{-2\sqrt{kg}\,t}+1}\right) = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{kg}\,t}-\mathrm{e}^{\sqrt{kg}\,t}}{\mathrm{e}^{-\sqrt{kg}\,t}+\mathrm{e}^{\sqrt{kg}\,t}}\right) = -\sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{th}(\sqrt{kg}\,t)$$

Total i. : 9 pts

---

ii. Puisque $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{th}\,x = 1$, la vitesse limite de chute vaut

Vitesse limite de chute exacte : 2 pts

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} -\sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{kg}\,t\right) = -\sqrt{\frac{g}{k}}$$

Total ii. : 2 pts

TOTAL QI : 11 PTS

Question II

i. L'équation

$$y'''(x) + 16y'(x) = 1 + \cos x$$

est une équation différentielle linéaire non homogène à coefficients constants d'ordre 3.

Puisqu'elle est linéaire, sa solution générale est la somme de la solution générale y_h de l'équation homogène et d'une solution particulière y_p de l'équation non homogène.

Décomposition (annoncée ou mise en oeuvre) de la solution : 2 pts dont 1 pt pour la justification par la linéarité.

Solution générale de l'équation homogène.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène est

Polynôme caractéristique : 1 pt

$$L(z) = z^3 + 16z = z(z^2+16)$$

Il possède trois zéros simples respectivement égaux à 0, $4i$ et $-4i$. De là,

Zéros du polynôme : 1 pt

$$y_h(x) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{4ix} + \tilde{C}_3\,\mathrm{e}^{-4ix}$$

où $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ et $\tilde{C}_3$ sont des constantes.

Sous forme réelle, la solution s'exprime aussi par

$$y_h(x) = C_1 + C_2\cos 4x + C_3 \sin 4x$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes.

Solution y_h sous forme réelle ou complexe : 2 pts

Solution particulière de l'équation non homogène.

L'équation étant linéaire et le second membre $1+\cos x$ de la forme $f_1(x)+f_2(x)$ avec $f_1(x)=1$ et $f_2(x)=\cos x$, nous recherchons $y_p(x)$ sous la forme $y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)$ où $y_{p_k}(x)$ est solution de

$$y'''(x)+16y'(x) = f_k(x), \qquad k \in \{1,\, 2\} \tag{†}$$

Principe de superposition : 1 pt dont 0.5 pt pour la justification par la linéarité

- Par simple examen de l'équation $y'''(x)+16y'(x)=1$, on peut aisément identifier la solution particulière

$$y_{p_1}(x) = \frac{x}{16}$$

Solution associée au terme "1" : 2 pts

Cette solution peut aussi être obtenue en utilisant la méthode de l'exponentielle-polynôme puisque le second membre $f_1(x)=1$ est de la forme $\mathcal{P}_n(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\mathcal{P}_n(x)=1$ et $\lambda=0$. Comme $\lambda=0$ est un zéro de multiplicité 1 du polynôme caractéristique $L(z)$ associé à l'équation homogène, on peut rechercher une solution particulière de la forme $y_{p_1}(x)=Cx$ où C est une constante. En substituant dans l'équation $y'''(x)+16y'(x)=1$, on trouve

$$0+16C=1 \quad \Rightarrow \quad C=\frac{1}{16}$$

ce qui conduit au résultat déjà énoncé.

- Puisque i n'est pas un zéro de $L(z)$, on peut rechercher une solution particulière de $y'''(x)+16y'(x)=\cos x$ sous la forme

$$y_{p_2}(x) = A\cos x + B\sin x$$

La présence exclusive de dérivées impaires de la fonction inconnue dans l'équation différentielle et du cosinus comme second membre permet aussi de chercher directement une solution particulière de la forme

$$y_{p_2}(x) = B\sin x$$

Solution associée au terme "$\sin x$" : 3 pts (dont 1 pt pour la méthode)

En substituant dans l'équation $y'''(x)+16y'(x)=\cos x$, on obtient

$$-B\cos x + 16B\cos x = \cos x \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{15}$$

et

$$y_{p_2}(x) = \frac{\sin x}{15}$$

Alternativement, la fonction $\cos x$ étant la partie réelle de la fonction e^{ix} et l'équation étant linéaire à coefficients constants réels, une solution particulière de l'équation $y'''(x)+16y'(x)=\cos x$ peut être obtenue en considérant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$y'''(x)+16y'(x) = \mathrm{e}^{ix} \tag{♡}$$

Le second membre de (♡) est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_n(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ où $\mathcal{P}_n(x) = 1$ et $\lambda = i$. Comme i n'est pas un zéro de $L(z)$, on peut rechercher une solution particulière du type

$$\tilde{y}_{p_2}(x) = C\,\mathrm{e}^{ix}$$

Substituant cette expression dans (♡), il vient

$$-iC\,\mathrm{e}^{ix} + 16iC\,\mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix}$$

soit

$$C = \frac{1}{15i} = -\frac{i}{15}$$

et

$$y_{p_2}(x) = \Re\left(-\frac{i}{15}\,\mathrm{e}^{ix}\right) = \frac{\sin x}{15}$$

L'application de la méthode de variation des constantes à la recherche d'une solution particulière correspondant au second membre complet est aussi cotée sur 6 pts

---

En conclusion, la solution générale de l'équation $y'''(x) + 16y'(x) = 1 + \cos x$ est donnée par

$$y(t) = C_1 + C_2\cos 4x + C_3\sin 4x + \frac{x}{16} + \frac{\sin x}{15}$$

Solution générale correcte sous forme réelle : 1 pt

Total i. : 11 pts

ii. La première condition auxiliaire $y(0) = y(\pi)$ donne l'égalité

$$C_1 + C_2 = C_1 + C_2 + \frac{\pi}{16}$$

Pas de solution car condition impossible à remplir : 2 pts

qui n'est jamais vérifiée. Le problème n'a donc pas de solution puisqu'une des conditions auxiliaires est impossible. Ceci explique le message du logiciel qui indique que l'ensemble des solutions est vide.

Ce résultat peut être discuté par rapport au théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles linéaires.

D'une part, les coefficients de l'équation différentielle et le second membre étant continus sur $\mathbb{R}$, le théorème assure que l'équation différentielle possède une solution générale au moins trois fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'exprimant au moyen de trois constantes. C'est bien ce qui a été obtenu au point i.

Cependant, l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel ne sont assurés par ce théorème que si les conditions auxiliaires prennent la forme de conditions de Cauchy, soit

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ y''(x_0) = \alpha_2 \end{cases}$$

Les conditions auxiliaires ne sont pas de Cauchy : 1 pt

Le théorème d'existence et unicité ne nous apprend rien : 1 pt

Comme les conditions auxiliaires du problème différentiel considéré ne sont pas de cette forme, le théorème ne peut garantir que les conditions auxiliaires permettent de déterminer de façon unique les constantes d'intégration apparaissant dans la solution générale de l'équation différentielle, *i.e.* il ne peut garantir l'existence d'une solution unique.

Remarquons que, comme le théorème ne présente que des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution, le fait que ses hypothèses ne sont pas rencontrées ne permet pas non plus de justifier l'absence de solution établie plus haut.

Total ii. 4 pts

TOTAL QII : 15 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Il faut être attentif à ne pas oublier les éventuelles solutions singulières. Quand la méthode de séparation des variables est appliquée, des solutions de l'équation différentielle sont souvent perdues lors de la réécriture de l'équation. Ici, les solutions constantes $v = \pm\sqrt{g/k}$ sont perdues car on ne peut diviser par $-g+kv^2$ si cette expression s'annule. En l'espèce, les solutions singulières correspondantes ne sont cependant pas des solutions du problème posé puisqu'elles ne vérifient pas la condition initiale $v(0) = 0$.
- Le choix de la primitive ($\operatorname{arcth} y$ ou $\operatorname{arcoth} y$) de la fonction $1/(1-y^2)$ dépend de l'intervalle de variation de la variable y. Ici, la vitesse v est nulle à l'instant initial de sorte que $y = v\sqrt{k/g}$ varie dans un intervalle comprenant l'origine. La primitive à choisir est donc $\operatorname{arcth} y$ qui est définie sur $]-1,1[$.
  Dans un autre problème, $\operatorname{arcoth} y$ serait choisie si y variait sur $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$.
- De manière générale, lorsqu'on est face à une expression en valeur absolue, il est nécessaire de discuter en fonction du signe de l'expression. Ici, vu la condition initiale donnant une vitesse v nulle, on savait que $\sqrt{k/g}\,v \in]-1,1[$ de sorte que

$$\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v}\right| = \frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v}$$

  Cette opération doit être justifiée.

Question II

i.
- Il est indispensable de vérifier les hypothèses permettant l'utilisation des différentes méthodes. Il ne suffit pas de donner en vrac toutes les caractéristiques de l'équation différentielle, il faut identifier au cas par cas les hypothèses adhoc.
  - ◇ La linéarité de l'équation permet d'exprimer la solution générale comme somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.
  - ◇ La méthode du polynôme caractéristique peut être appliquée car l'équation est linéaire à coefficients constants.
  - ◇ C'est également la linéarité de l'équation qui justifie l'application du principe de superposition à la recherche d'une solution particulière comme somme de deux solutions particulières correspondant aux deux termes du second membre.
  - ◇ C'est parce que l'équation est linéaire à coefficients constants réels que la méthode de l'exponentielle-polynôme peut être utilisée pour trouver une solution particulière correspondant à $\cos x$.
- De trop nombreux étudiants sont incapables de déterminer les zéros du polynôme caractéristique $L(z) = z(z^2+16)$. Celui-ci possède trois zéros simples respectivement égaux à 0, $4i$ et $-4i$. Les solutions de $z^2 = -16$ sont $z = \pm 4i$ et pas $z = \pm 4$.
- En vertu de la linéarité de l'équation différentielle, la méthode de variation des constantes pouvait être utilisée pour déterminer une solution particulière.

Il est cependant préférable d'utiliser des méthodes plus directes, comme celles présentées dans la solution-type, et de réserver la méthode de variation des constantes aux cas où il est impossible de deviner la forme d'une solution particulière ou de la déduire de la méthode de l'exponentielle-polynôme.

ii.
- Il était demandé si l'absence de solution du problème était en accord avec la théorie. C'était au théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles linéaires qu'il convenait de se référer. Il fallait remarquer que les conditions auxiliaires données ne sont pas de Cauchy alors que le théorème d'existence et d'unicité comporte une telle hypothèse. Il en résulte que ce théorème ne peut ni confirmer ni infirmer l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel.
- Le théorème d'existence et unicité ne donne que des conditions suffisantes d'existence et unicité. On ne peut donc justifier l'absence de solution du problème par le fait que les conditions auxiliaires données ne sont pas de Cauchy.

  Il convenait par contre de montrer qu'une des conditions auxiliaires est incompatible avec la solution générale de l'équation différentielle. C'est ce constat qui permet de justifier que le problème ne possède pas de solution.