

*Durée de l'épreuve : 4 heures.  
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

Question I

i. Sur base du théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, établissez les propriétés (domaine, ordre de continue dérivabilité) de la fonction arcth et l'expression de sa dérivée.

ii. (a) Complétez la définition

$$f(x) = O[g(x)], \quad (x \rightarrow x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (\dots)(\dots) : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

(b) Sur base de cette définition, montrez que si

$$f_1(x) = O[g(x)], \quad (x \rightarrow x_0) \quad \text{et} \quad f_2(x) = O[g(x)], \quad (x \rightarrow x_0)$$

alors

$$f_1(x) + f_2(x) = O[g(x)], \quad (x \rightarrow x_0)$$

iii. Exprimez en français et démontrez que  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$  où  $\mathbf{f}$  désigne un champ vectoriel défini sur  $\mathbb{R}^3$ . Sous quelle condition ce résultat est-il valable ?

iv. Le taux de croissance  $\mu$  d'une culture d'algues dépend de la température  $T$  et de la concentration des nutriments  $N$  par une relation du type  $\mu = \mu(T, N)$ .

Si  $T = T(x, y, z, t)$  et  $N = N(x, y, z, t)$  où  $x, y$ , et  $z$  désignent les trois coordonnées de l'espace et où  $t$  est le temps, déterminez l'expression de

$$\frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{où} \quad M(x, y, z, t) = \mu[T(x, y, z, t), N(x, y, z, t)]$$

Sous quelles hypothèses ce résultat peut-il être justifié ?

Question II

Déterminez la solution réelle  $y(t)$  du problème différentiel

$$y'' + 2y' + 5y = t e^{-t} \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0$$

### Question III

On cherche à résoudre l'équation

$$\ln(1 + 2x) = \frac{3x}{2} \quad (\diamond)$$

- i. En vous basant sur les graphiques des fonctions apparaissant dans les deux membres de cette équation, justifiez complètement l'existence d'une solution unique sur  $]0, +\infty[$ .
- ii. Déterminez les expressions du polynôme de Taylor  $\mathcal{P}_2(x)$  de degré 2 de la fonction  $\ln(1 + 2x)$  au voisinage de  $a = 0$  et du reste  $\mathcal{R}_2(x)$  correspondant. Sur quel ensemble la formule de Taylor correspondante est-elle applicable? Justifiez.
- iii. Déterminez la solution approchée  $x_*$  de  $(\diamond)$  obtenue en remplaçant le membre de gauche de l'équation par son approximation  $\mathcal{P}_2(x)$ .
- iv. En vous basant sur les résultats du point ii., établissez une majoration de la différence

$$\ln(1 + 2x_*) - \frac{3x_*}{2}$$

entre les deux termes de l'équation  $(\diamond)$  évalués en  $x_*$ .

### Question IV

Parmi toutes les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

on souhaite déterminer celle dont la norme euclidienne  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  est minimale.

- i. Interprétez géométriquement le problème et justifiez sur cette base l'existence d'un minimum.
- ii. Déterminez la solution de norme euclidienne minimale du système d'équations considéré et la valeur correspondante de la norme
  - (a) en procédant par élimination;
  - (b) en appliquant la méthode du Lagrangien.

Dans les deux cas, justifiez le raisonnement suivi.

**SOLUTION TYPE**

**Question I**

i. La fonction  $\text{th}$  est indéfiniment continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\frac{d}{dx} \text{th} x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$$

L'image de  $\mathbb{R}$  par la fonction  $\text{th}$  est l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Par le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que la fonction  $\text{arcth}$  est définie et indéfiniment continûment dérivable sur  $] -1, 1[$ .

La dérivée de la fonction  $\text{arcth}$  est donnée par

$$\frac{d}{dx} \text{arcth} x = \frac{1}{\left. \frac{d}{dy} \text{th} y \right|_{y=\text{arcth} x}} = \text{ch}^2(\text{arcth} x) = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{arcth} x)} = \frac{1}{1 - x^2}$$

ii. (a) La définition s'écrit

$$f(x) = O[g(x)], \quad (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (\exists C > 0 \text{ et } V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

(b) Si  $f_1(x) = O[g(x)]$ ,  $(x \rightarrow x_0)$ , alors

$$(\exists C_1 > 0 \text{ et } V_1(x_0))(\forall x \in V_1(x_0)) : |f_1(x)| \leq C_1|g(x)|$$

De même, si  $f_2(x) = O[g(x)]$ ,  $(x \rightarrow x_0)$ , alors

$$(\exists C_2 > 0 \text{ et } V_2(x_0))(\forall x \in V_2(x_0)) : |f_2(x)| \leq C_2|g(x)|$$

On peut alors écrire que

$$(\exists C = C_1 + C_2 > 0 \text{ et } V(x_0) = V_1(x_0) \cap V_2(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \leq (C_1 + C_2)|g(x)| = C|g(x)|$$

Ceci démontre que

$$f_1(x) + f_2(x) = O[g(x)], \quad (x \rightarrow x_0)$$

iii. La relation  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$  exprime que la divergence du rotationnel du champ vectoriel  $\mathbf{f}$  est toujours nulle.

Notant  $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$  et procédant formellement pour le calcul du déterminant, on a

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{f} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Il vient ensuite,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

à condition de tenir compte de l'égalité des dérivées croisées d'ordre deux qui ne diffèrent que par l'ordre de dérivation, ce qui est le cas si  $\mathbf{f} \in C_2(\mathbb{R}^3)$ .

iv. Si  $M(x, y, z, t) = \mu[T(x, y, z, t), N(x, y, z, t)]$ , le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial z}(x, y, z, t) &= \frac{\partial \mu}{\partial T}[T(x, y, z, t), N(x, y, z, t)] \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z, t) \\ &\quad + \frac{\partial \mu}{\partial N}[T(x, y, z, t), N(x, y, z, t)] \frac{\partial N}{\partial z}(x, y, z, t)\end{aligned}$$

Cette expression est valable sur tout ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$  sur lequel les fonctions réelles  $T$  et  $N$  sont dérivables et tel que  $\mu$  est continûment dérivable sur un ouvert  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  pour lequel  $[T(x, y, z, t), N(x, y, z, t)] \in \omega$  pour tout  $(x, y, z, t) \in \Omega$ .

## Question II

Soit

$$y'' + 2y' + 5y = t e^{-t}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale  $y(t)$  est donc la somme de la solution générale  $y_h(t)$  de l'équation homogène associée et d'une solution particulière  $y_p(t)$  de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé  $z^2 + 2z + 5$ . Celui-ci possède les deux zéros complexes conjugués  $z = -1 \pm 2i$ . La solution générale s'écrit donc

$$y_h(t) = A e^{(-1+2i)t} + B e^{(-1-2i)t}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes. Sous forme réelle, la solution s'écrit

$$y_h(t) = e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

L'équation différentielle à résoudre est linéaire à coefficients constants et son second membre  $t e^{-t}$  est du type exponentielle-polynôme. Vu que le coefficient de la variable  $t$  dans l'exponentielle du second membre n'est pas égal à un des zéros du polynôme caractéristique de l'équation homogène, on peut rechercher une solution particulière du type

$$y_p(t) = (Ct + D)e^{-t}$$

Substituant cette expression dans l'équation différentielle en tenant compte de

$$y_p'(t) = Ce^{-t} - (Ct + D)e^{-t} \quad \text{et} \quad y_p''(t) = -Ce^{-t} - Ce^{-t} + (Ct + D)e^{-t},$$

on obtient la condition

$$-2Ce^{-t} + (Ct + D)e^{-t} + 2Ce^{-t} - 2(Ct + D)e^{-t} + 5(Ct + D)e^{-t} = t e^{-t}$$

Après simplification, on trouve

$$4D + 4Ct = t$$

et donc  $D = 0$  et  $C = 1/4$ . On obtient alors la solution particulière

$$y_p(t) = \frac{t}{4}e^{-t}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit

$$y(t) = e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{t}{4}e^{-t}$$

Les constantes peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ . La première condition donne directement  $C_1 = 0$ . Dès lors, on calcule aisément

$$y'(t) = e^{-t} \left( 2C_2 \cos 2t - C_2 \sin 2t - \frac{t}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

La seconde condition initiale s'exprime alors sous la forme

$$y'(0) = 0 = 2C_2 + \frac{1}{4}$$

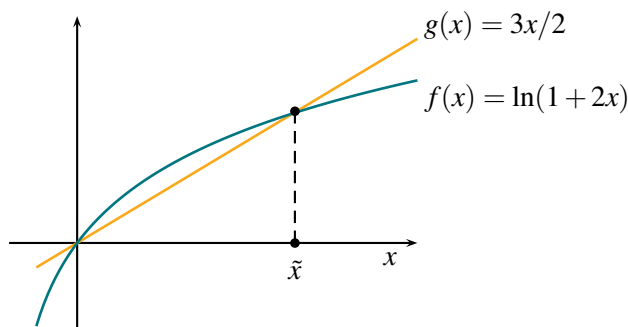
ce qui donne  $C_2 = -1/8$ .

La solution du problème s'écrit finalement

$$y(t) = e^{-t} \left( -\frac{1}{8} \sin 2t + \frac{t}{4} \right)$$

### Question III

- i. Les graphiques des fonctions  $f(x) = \ln(1+2x)$  et  $g(x) = 3x/2$  correspondant aux deux membres de l'équation considérée peuvent être esquissés de la façon suivante



Les deux graphiques passent par l'origine des axes. L'analyse des pentes des tangentes aux deux graphiques en ce point indique que la fonction  $f$  croît initialement plus vite que la fonction  $g$ . En effet, on a

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(1+2x)) = \frac{2}{1+2x} \\ g'(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \quad f'(0) = 2 > g'(0) = \frac{3}{2}$$

Dès lors, le graphique de la fonction  $f$  est initialement situé au-dessus de celui de la fonction  $g$ .

À l'infini, on sait cependant que  $f = o(g)$ , de sorte que les deux graphiques doivent se croiser en au moins un point de l'intervalle  $]0, +\infty[$ , puisque les deux fonctions sont continues.

On peut justifier l'existence d'un seul point d'intersection dans cet intervalle en considérant la différence  $F = f - g$ . On calcule aisément

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{3}{2} = \frac{1-6x}{2(1+2x)}$$

La différence entre les deux fonctions croît sur  $]0, 1/6[$  puis décroît, ce qui exclut la présence d'intersections multiples.

- ii. L'application de la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de l'origine demande que la fonction soit réelle, deux fois continûment dérivable sur  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$  si  $x < 0$ ) et trois fois dérivable sur  $]0, x[$  ( $]x, 0[$  si  $x < 0$ ). La fonction  $f(x) = \ln(1+2x)$  vérifie ces hypothèses pour tout  $x \in ]-1/2, +\infty[$  puisqu'elle est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur  $] -1/2, +\infty[$ .

La formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de  $a = 0$  s'écrit

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

où

$$\mathcal{P}_2(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0)$$

et

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]0, x[ \text{ ou } ]x, 0[$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+2x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{2}{1+2x} & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= -\frac{4}{(1+2x)^2} & f''(0) &= -4 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{16}{(1+2x)^3} & f^{(3)}(\xi) &= \frac{16}{(1+2\xi)^3} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_2(x) = 2x - 2x^2$$

et

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{16}{(1+2\xi)^3} \frac{x^3}{6} = \frac{8x^3}{3(1+2\xi)^3}, \quad \xi \in ]0, x[ \text{ ou } ]x, 0[$$

- iii. En remplaçant le membre de gauche de l'équation ( $\diamond$ ) par son approximation  $\mathcal{P}_2(x)$ , l'équation à résoudre se transforme en

$$2x - 2x^2 = \frac{3x}{2}$$

dont la solution appartenant à  $]0, +\infty[$  est  $x_* = \frac{1}{4}$ .

iv. Puisque  $x_* \in ]-1/2, +\infty[$ , la formule de Taylor établie est valable et on peut écrire

$$\ln(1 + 2x_*) = \mathcal{P}_2(x_*) + \mathcal{R}_2(x_*)$$

avec

$$\mathcal{R}_2(x_*) = \frac{8x_*^3}{3(1+2\xi)^3} \quad \text{et} \quad \xi \in ]0, x_*[ = ]0, 1/4[$$

La différence entre les deux membres de l'équation considérée s'écrit donc

$$\ln(1 + 2x_*) - \frac{3x_*}{2} = \ln(1 + 2x_*) - \mathcal{P}_2(x_*) = \mathcal{R}_2(x_*)$$

Cette différence peut dès lors être majorée selon

$$|\mathcal{R}_2(x_*)| = \frac{8x_*^3}{3(1+2\xi)^3} = \frac{1}{24(1+2\xi)^3} < \frac{1}{24}$$

puisque  $0 < \xi < 1/4$ .

#### Question IV

Le problème posé peut être exprimé sous la forme du problème d'optimisation avec contraintes d'égalité

$$\mathcal{P} \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^3} \tilde{f}(x) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{s.c. } g_1(x) = x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x) = 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

- i. Remarquons tout d'abord que ce problème possède une solution. En effet, il peut être interprété géométriquement comme la recherche de la distance à l'origine de la droite située à l'intersection des deux plans non parallèles décrits par les équations du système.
- ii. Les fonctions  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $x^2 + y^2 + z^2$  réalisant leur minimum au même point, le problème posé est équivalent à

$$\mathcal{P} \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.c. } g_1(x) = x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x) = 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Les deux contraintes linéaires permettent d'éliminer les variables  $y$  et  $z$  selon

$$y = 3 - 2x \quad \text{et} \quad z = 1 - x - 2(3 - 2x) = -5 + 3x$$

ce qui permet d'exprimer la fonction cible sous la forme

$$F(x) = f(x, 3 - 2x, -5 + 3x) = x^2 + (3 - 2x)^2 + (-5 + 3x)^2 = 14x^2 - 42x + 34$$

La fonction  $F$  décrit une parabole présentant un minimum absolu en  $x = 42/14 = 3/2$ .

La solution de norme minimale du système linéaire donné est donc

$$x = (3/2, 0, -1/2)$$

et la norme correspondante vaut

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

- (b) Les fonctions  $f, g_1$  et  $g_2$  sont indéfiniment continûment dérivables sur  $\mathbb{R}^3$  et donc différentiables. De plus, on peut construire la matrice

$$G = (\nabla g_1(x) \quad \nabla g_2(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le rang est égal à 2 et est maximum, ce qui garantit que les gradients des contraintes sont linéairement indépendants.

On en déduit que le minimum à identifier peut être recherché parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) - \lambda_2(2x + y - 3)$$

Ces points stationnaires sont les solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - x - 2y - z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 3 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

En exploitant la troisième et la deuxième de ces équations, on obtient

$$\lambda_1 = 2z \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2y - 4z$$

ce qui conduit, en injectant ces résultats dans la première équation, au système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 0 & (1) \\ x + 2y + z = 1 & (2) \\ 2x + y = 3 & (3) \end{cases}$$

L'équation (3) donne  $y = 3 - 2x$ , ce qui permet d'écrire les équations (1) et (2)

$$\begin{cases} 10x + 6z = 12 & (4) \\ -3x + z = -5 & (5) \end{cases}$$

On obtient alors  $z = 3x - 5$  puis, en injectant ce résultat dans l'équation (4),  $x = 3/2$  de sorte que la solution s'écrit

$$x = (3/2, 0, -1/2)$$

Puisque la solution de norme minimale existe et que le Lagrangien ne possède qu'un seul point stationnaire, celui-ci correspond à la solution de norme minimale recherchée (déjà déterminée en ii.(a))