Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2025

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\exists x \geq M) : |f(x) - 2| \leq \varepsilon$$

Peut-on alors affirmer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$? Justifiez.

ii. Déterminez le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction arch en tant que fonction réciproque de la fonction ch. Justifiez.

iii. Pour quelles valeurs des paramètres réels β et γ, où $\gamma > 0$, la solution de

$$\ddot{y}(t) + 2\beta\dot{y}(t) + \gamma y(t) = 0$$

(où $\dot{}$ désigne la dérivée temporelle) est-elle bornée pour $t \in [0, +\infty[$ quelles que soient les conditions de Cauchy imposées en un point de cet intervalle ? Justifiez.

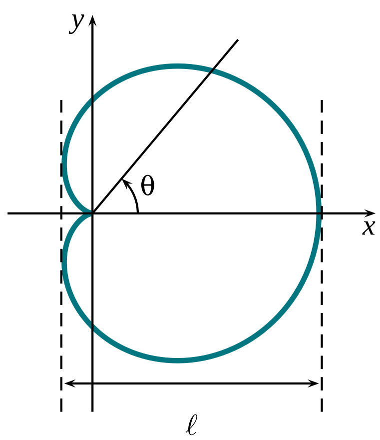
iv. On considère deux fonctions f et g continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$. Déterminez l'expression de $\nabla(f/g)$ en fonction de f, g et des gradients de f et g.

v. En coordonnées polaires, l'équation

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

(où $a > 0$ est une constante) décrit une cardioïde, *i.e.* la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle de même rayon.

Déterminez la dimension ℓ de la cardioïde selon l'axe horizontal.



Tournez la page.

Question II

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$$

i. Pour quelles valeurs de x peut-on appliquer à cette fonction la formule de Taylor au voisinage de $a = 0$ à un ordre n quelconque ? Justifiez.

ii. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 approchant la fonction $f(x)$ au voisinage de $a = 0$ ainsi que l'expression du reste $\mathcal{R}_2(x)$ correspondant.

iii. Déterminez une majoration de l'erreur commise en approchant $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ sur $[-1, 1]$.

Question III

Le modèle de Maxwell des matériaux viscoélastiques est décrit par

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\sigma = \frac{d\lambda}{dt}$$

où $\sigma(t)$ et $\lambda(t)$ représentent respectivement la contrainte agissant dans le matériau et sa déformation et où le module d'élasticité E et le coefficient de viscosité η sont des constantes strictement positives caractéristiques du matériau.

i. On impose des déformations du matériau dont l'évolution temporelle est décrite par

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0 \omega t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1/\omega \\ \lambda_0 & \text{si} \quad t \geq 1/\omega \end{cases}$$

où λ_0 et ω sont des paramètres strictement positifs. Sachant que σ varie continument sur $[0, +\infty[$, déterminez la loi d'évolution $\sigma(t)$ des contraintes au sein du matériau pour $t \geq 0$ si $\sigma(0) = 0$.

ii. Déterminez l'expression intégrale de $\sigma(t)$ en fonction de $\sigma_0 = \sigma(0)$, E, η et $\dfrac{d\lambda}{dt}$ valable pour une loi $\lambda(t)$ quelconque continument dérivable sur $[0, +\infty[$.

Question IV

On considère les relations

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x \end{cases}$$

i. Montrez que ces relations permettent de définir un changement de variables régulier entre les variables $(x, y) \in \Omega$ et $(\xi, \eta) \in \Omega'$ où Ω et Ω' sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à déterminer. Étudiez la régularité de ce changement de variables.

ii. Déterminez l'expression des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et du laplacien en fonction des variables ξ et η.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La proposition
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\exists x \geq M) : |f(x) - 2| \leq \varepsilon$$
ne permet pas d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Considérons par exemple la fonction $f(x) = 2 + \sin x$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $M = 1 > 0$ et $x = 2\pi \geq M$, tel que $f(x) = 2$ et donc $|f(x) - 2| = 0 \leq \varepsilon$. Cependant, la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas et n'est donc pas égale à 2.

ii. La fonction ch vérifie les hypothèses du théorème d'existence et de dérivabilité des fonctions réciproques sur $]0, +\infty[$ puisqu'elle est réelle et que
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x \in C_\infty(]0, +\infty[) \\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x > 0, \quad \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}$$
On en déduit que la fonction $\operatorname{arch} = \operatorname{ch}^{-1}$ est définie et indéfiniment continûment dérivable sur $]1, +\infty[= \operatorname{ch}(]0, +\infty[)$ et que sa dérivée sur cet intervalle est donnée par
$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \operatorname{arch} y &= \left.\frac{1}{\frac{d}{dx}\operatorname{ch} x}\right|_{x=\operatorname{arch} y} = \left.\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right|_{x=\operatorname{arch} y} \\ &= \left.\frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ch} x)^2 - 1}}\right|_{x=\operatorname{arch} y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \end{aligned}$$
Puisque $\operatorname{ch} 0 = 1$, on peut étendre le domaine de définition de arch à $[1, +\infty[$.

iii. Afin de déterminer la solution générale de l'équation différentielle proposée qui est linéaire à coefficients constants et homogène, on considère les zéros du polynôme caractéristique
$$L(z) = z^2 + 2\beta z + \gamma$$
dont le réalisant $\rho = 4(\beta^2 - \gamma)$.

- Si $\beta^2 = \gamma > 0$, $L(z)$ possède le zéro double $z = -\beta$ et la solution s'écrit
$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\, \mathrm{e}^{-\beta t}$$
où C_1 et C_2 sont des constantes. Si $\beta > 0$, cette solution tend vers 0 pour $t \to +\infty$ et est bornée.
- Si $\beta^2 < \gamma$, $L(z)$ possède les deux zéros complexes conjugués
$$z_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\gamma - \beta^2}$$
et la solution s'écrit
$$y(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left[C_3 \cos(\sqrt{\gamma-\beta^2}\,t) + C_4 \sin(\sqrt{\gamma-\beta^2}\,t)\right]$$
où C_3 et C_4 sont des constantes. Cette solution tend vers 0 pour $t \to +\infty$ si $\beta > 0$ et est oscillatoire si $\beta = 0$. Elle est donc bornée si $\beta \geq 0$.
- Si $\beta^2 > \gamma > 0$, $L(z)$ possède les deux zéros réels
$$z_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}$$
et la solution s'écrit
$$y(t) = C_5\, \mathrm{e}^{(-\beta + \sqrt{\beta^2-\gamma})t} + C_6\, \mathrm{e}^{(-\beta - \sqrt{\beta^2-\gamma})t}$$
où C_5 et C_6 sont des constantes. Cette solution est bornée si $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$, c'est-à-dire si $\beta > 0$.

Puisque le cas $\beta = 0$ n'est possible que dans le second cas et conduit à une solution bornée, on peut conclure que la solution est bornée pour $t \in [0, +\infty[$ quelles que soient les conditions de Cauchy imposées en un point de cet intervalle et la valeur de $\gamma > 0$ si $\beta \geq 0$.

iv. En tout point où g diffère de zéro, on a

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)\mathbf{e}_z \\
&= \left[\frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right]\mathbf{e}_x + \left[\frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial y}\right]\mathbf{e}_y + \left[\frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial z}\right]\mathbf{e}_z \\
&= \frac{1}{g}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\right] - \frac{f}{g^2}\left[\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{e}_z\right] \\
&= \frac{1}{g}\nabla f - \frac{f}{g^2}\nabla g
\end{aligned}$$

v. La coordonnée x des points de la cardioïde est donnée par

$$x(\theta) = r\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta$$

Les variations de $x(\theta)$ peuvent être étudiées en calculant

$$x'(\theta) = a\left[-(1+\cos\theta)\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\right] = -a\sin\theta(1+2\cos\theta)$$

Les points stationnaires sont, à un multiple de 2π près,

$$\left\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$$

En se basant sur la représentation graphique, on constate que l'abscisse maximale est réalisée pour $\theta = 0$ alors que la valeur minimale est obtenue pour $\theta = \pm 2\pi/3$. Dès lors, la dimension horizontale totale de la cardioïde est donnée par

$$\ell = x(0) - x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2a - \left(-\frac{a}{4}\right) = \frac{9a}{4}$$

Question II

i. La formule de Taylor peut être appliquée à la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$$

à un ordre n quelconque au voisinage de $a = 0$ pour tout x tel que f est réelle, $f \in C_n([0,x])$ (resp. $f \in C_n([x,0])$) et f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]0,x[$ (resp. sur $]x,0[$).
La fonction f étant réelle, définie et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, les hypothèses ci-dessus sont rencontrées pour tout $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor peut donc être appliquée dans les conditions envisagées sur $\mathbb{R}$.

ii. Le polynôme de Taylor de degré 2 approchant $f(x)$ au voisinage de $a = 0$ s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0)$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2+4}\,, & f(0) &= \frac{1}{4}\\
f'(x) &= \frac{-2x}{(x^2+4)^2}\,, & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= \frac{-2(x^2+4)^2 + 2x\,2(x^2+4)\,2x}{(x^2+4)^4} & &\\
&= \frac{6x^2-8}{(x^2+4)^3}\,, & f''(0) &= -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\mathcal{P}_2(x) = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{16}$$

L'expression du reste est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{3!}\, f^{(3)}(\xi) \quad \text{où } \xi \in]0,x[\text{ (ou } \xi \in]x,0[\text{ si } x<0)$$

On calcule

$$f^{(3)}(x) = \frac{12x\,(x^2+4)^3 - (6x^2-8)\,3(x^2+4)^2\,2x}{(x^2+4)^6} = \frac{24x(4-x^2)}{(x^2+4)^4}$$

Dès lors,

$$\mathcal{R}_2(x) = 4x^3\, \frac{\xi(4-\xi^2)}{(\xi^2+4)^4}$$

où $\xi \in]0,x[$ (ou $\xi \in]x,0[$ si $x<0$).

iii. Pour tout $x \in [-1,1]$, on sait que $|x|^3 \leq 1$ et

$$|\mathcal{R}_2(x)| = 4\left|x^3\right|\, \frac{\left|\xi(4-\xi^2)\right|}{(\xi^2+4)^4} \leq 4\, \frac{\left|\xi(4-\xi^2)\right|}{(\xi^2+4)^4}$$

Comme $x \in [-1,1]$ et $\xi \in]0,x[$ si $x>0$ ou $\xi \in]x,0[$ si $x<0$, alors $\xi \in]-1,1[\setminus\{0\}$.
Une majoration de la fraction apparaissant dans le membre de droite peut être obtenue en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur sur cet intervalle.

$\forall \xi \in]-1,1[\backslash\{0\}$, on a
$$(\xi^2+4)^4 > 4^4$$
et
$$\left.\begin{array}{r} |\xi| < 1 \\ \left|4-\xi^2\right| < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\xi(4-\xi^2)\right| = |\xi|\,\left|4-\xi^2\right| < 4$$
de sorte que
$$|\mathcal{R}_2(x)| < 4\,\frac{4}{4^4} = \frac{1}{16}$$
Notons qu'une majoration "plus fine" du numérateur est possible. L'expression apparaissant au numérateur, $N(\xi) = \xi(4-\xi^2) = 4\xi - \xi^3$, est impaire et strictement croissante sur $]-1,1[$ (sa dérivée $N'(\xi) = 4 - 3\xi^2$ étant strictement positive sur l'intervalle). On peut donc écrire que, $\forall \xi \in]-1,1[\backslash\{0\}$,
$$\left|\xi(4-\xi^2)\right| = \left|4\xi-\xi^3\right| < \left|4\xi-\xi^3\right|_{\xi=1} = 3$$
Dès lors, le reste peut être majoré selon
$$|\mathcal{R}_2(x)| < 4\,\frac{3}{4^4} = \frac{3}{64}$$

Question III

i. La résolution du problème demande d'identifier une fonction continue $\sigma(t)$ qui vérifie l'équation différentielle
$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\sigma = \frac{d\lambda}{dt} = \begin{cases} \lambda_0\omega & \text{si} \quad t \in [0, 1/\omega[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [1/\omega, +\infty[\end{cases}$$
et la condition initiale $\sigma(0) = 0$.
Le second membre de l'équation étant défini par morceaux, construisons cette solution successivement sur $[0, 1/\omega[$ et sur $[1/\omega, +\infty[$.

Solution sur $[0, 1/\omega[$.

L'équation (écrite sous sa forme canonique)
$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\lambda_0\omega \qquad (\spadesuit)$$
étant linéaire et non homogène, sa solution peut être exprimée sous la forme
$$\sigma(t) = \sigma_h(t) + \sigma_p(t)$$
où $\sigma_h(t)$ est la solution générale de l'équation homogène associée et où $\sigma_p(t)$ désigne une solution particulière de l'équation non homogène.

Solution générale de l'équation homogène.

L'équation homogène
$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta}\sigma = 0$$
étant linéaire à coefficients constants, sa solution générale peut être construite en considérant les zéros de son polynôme caractéristique
$$L(z) = z + \frac{E}{\eta}$$

Le seul zéro est simple et vaut $-E/\eta$. La solution générale s'écrit donc

$$\sigma_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-Et/\eta}$$

où A est une constante.

Solution particulière de l'équation non homogène.

La fonction constante $\sigma_p(t) = \lambda_0\omega\eta$ est une solution particulière évidente de l'équation non homogène.
De façon alternative et plus systématique, une solution particulière peut être obtenue en appliquant la méthode de l'exponentielle-polynôme. Considérant la forme du second membre $f(t) = E\lambda_0\omega$, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$\sigma_p(t) = Ce^{0t} = C$$

où C est une constante à déterminer et 0 n'est pas un zéro de $L(z)$. Cette fonction est solution de (♠) si

$$\frac{E}{\eta}C = E\lambda_0\omega \qquad \text{soit} \qquad C = \lambda_0\omega\eta$$

On obtient ainsi la solution particulière $\sigma_p(t) = \lambda_0\omega\eta$.

Solution.

Sur base de ce qui précède, la solution générale de l'équation différentielle (♠) sur $[0,1/\omega[$ est donc

$$\sigma(t) = A\,\mathrm{e}^{-Et/\eta} + \lambda_0\omega\eta$$

où A est une constante.
Tenant compte de la condition initiale $\sigma(0) = 0$, il vient

$$\sigma(0) = A + \lambda_0\omega\eta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\lambda_0\omega\eta$$

Dès lors, on obtient

$$\sigma(t) = \lambda_0\omega\eta\left(1 - \mathrm{e}^{-Et/\eta}\right) \qquad \forall t \in [0,1/\omega[$$

Solution sur $[1/\omega,+\infty[$.

Dans l'intervalle $[1/\omega,+\infty[$, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta}\sigma = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

La solution générale de cette équation homogène a été déterminée plus haut et s'écrit simplement

$$\sigma(t) = B\,\mathrm{e}^{-Et/\eta}$$

où B est une constante.
La constante B est déterminée de façon à assurer la continuité de $\sigma(t)$ en $t = 1/\omega$, soit

$$\lim_{t\to(1/\omega)^-} \lambda_0\omega\eta\left(1 - \mathrm{e}^{-Et/\eta}\right) = \lim_{t\to(1/\omega)^+} B\,\mathrm{e}^{-Et/\eta}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_0\omega\eta - \lambda_0\omega\eta\,\mathrm{e}^{-E/(\omega\eta)} = B\,\mathrm{e}^{-E/(\omega\eta)}$$

ce qui mène à

$$B = \lambda_0 \omega \eta \left(e^{E/(\omega\eta)} - 1 \right)$$

Dès lors, on obtient

$$\sigma(t) = \lambda_0 \omega \eta \left(e^{E/(\omega\eta)} - 1 \right) e^{-Et/\eta} \qquad \forall t \geq 1/\omega$$

Solution du problème.

Finalement, en regroupant les résultats précédents, on peut exprimer la solution continue du problème différentiel considéré sous la forme

$$\sigma(t) = \begin{cases} \lambda_0 \omega \eta \left(1 - e^{-Et/\eta}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t < 1/\omega \\ \lambda_0 \omega \eta \left(e^{E/(\omega\eta)} - 1\right) e^{-Et/\eta} & \text{si} \quad t \geq 1/\omega \end{cases}$$

ii. L'équation différentielle considérée peut s'écrire sous la forme canonique

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\frac{d\lambda}{dt} \tag{$\heartsuit$}$$

Cette équation étant linéaire à coefficients constants et son terme indépendant continu sur $[0, +\infty[$, l'existence d'une solution sur cet intervalle est assurée. De plus, la condition initiale $\sigma(0) = \sigma_0$ fournie assure l'unicité de la solution.

La solution générale de l'équation homogène prend la même forme que précédemment, soit

$$\sigma_h(t) = A\, e^{-Et/\eta}$$

où A est une constante.

En considérant la solution fondamentale de l'équation homogène associée $e^{-Et/\eta}$ identifiée dans le point précédent, on recherche une solution particulière de la forme

$$\sigma_p(t) = C(t)\, e^{-Et/\eta}$$

où $C(t)$ est une fonction à déterminer. [1]

Injectant cette expression dans ($\heartsuit$), on obtient

$$C'(t)\, e^{-Et/\eta} - C(t)\frac{E}{\eta}\, e^{-Et/\eta} + \frac{E}{\eta}C(t)\, e^{-Et/\eta} = E\frac{d\lambda}{dt}$$

soit

$$C'(t) = E\, e^{Et/\eta}\, \frac{d\lambda}{dt}$$

La solution particulière peut donc s'écrire sous la forme

$$\sigma_p(t) = E\, e^{-Et/\eta} \int e^{Et/\eta}\, \frac{d\lambda}{dt} dt$$

et la solution générale prend la forme

$$\sigma(t) = A\, e^{-Et/\eta} + E\, e^{-Et/\eta} \int e^{Et/\eta}\, \frac{d\lambda}{dt} dt$$

Afin de pouvoir appliquer aisément la condition initiale $\sigma(0) = \sigma_0$, il convient de choisir la primitive qui s'annule en 0 et d'écrire la solution générale sous la forme

$$\sigma(t) = A\, e^{-Et/\eta} + E\, e^{-Et/\eta} \int_0^t e^{Eu/\eta}\, \frac{d\lambda}{du} du$$

1. Cette approche constitue une forme alternative de la méthode de variation des constantes applicable aux équations du premier ordre. La méthode générale peut aussi être utilisée ici.

Il vient alors simplement

$$\sigma(0) = A = \sigma_0$$

de sorte que la solution du problème est donnée par

$$\sigma(t) = \sigma_0\, \mathrm{e}^{-Et/\eta} + E\, \mathrm{e}^{-Et/\eta} \int_0^t \mathrm{e}^{Eu/\eta} \frac{d\lambda}{du} du$$

Question IV

i. Si $x = \eta \neq 0$, les relations

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x \end{cases}$$

donnant η et ξ en fonction de x et y s'inversent en

$$\begin{cases} x = \eta \\ y = \dfrac{\xi}{\eta} \end{cases}$$

Elles établissent donc une bijection entre les ouverts

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2 : \eta \neq 0\}$$

De plus, les fonctions $\eta(x,y) = x$ et $\xi(x,y) = xy$ appartiennent à $C_\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial(\eta,\xi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

En conclusion, les relations données définissent un changement de variables régulier, d'ordre infini entre Ω et Ω'.

ii. Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta} + y\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi} = x\frac{\partial}{\partial\xi} = \eta\frac{\partial}{\partial\xi}$$

Dans $\mathbb{R}^2$, l'opérateur laplacien est donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

On a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

En distribuant et en tenant compte de l'égalité des dérivées croisées, il vient successivement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\xi}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\xi}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\xi^2}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\xi^2}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \eta^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

Dès lors,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \left(\eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$