LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2019

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

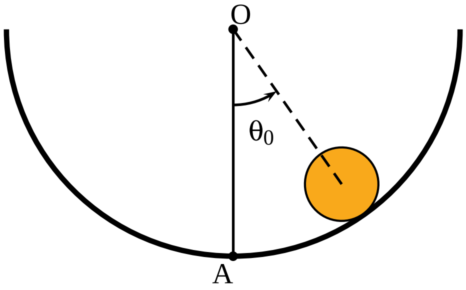
Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez le concept de *force conservative*. De cette définition, déduisez l'expression particulière de la puissance développée par une telle force.
ii. Définissez le concept de *force centrale*. Montrez que le mouvement d'un point matériel soumis à une telle force est plan.
iii. Établissez la relation entre le moment cinétique d'un solide rapporté à un système d'axes centrés en son centre d'inertie et gardant une orientation constante et le tenseur central d'inertie de ce solide.
iv. Définissez le concept de *couple de réaction gyroscopique*.

Question II

On considère une bille homogène de masse m oscillant à l'intérieur d'un demi-cylindre creux d'axe horizontal et de rayon R. Le mouvement est plan. À l'instant initial, la bille est lâchée sans vitesse de la position indiquée sur la figure ($\theta_0 > 0$).



i. Dans un premier temps, on assimile la bille à un point matériel glissant sans frottement à l'intérieur du demi-cylindre.
   (a) Relevez toutes les forces agissant sur la bille avec leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou de liaison, force conservative).
   (b) Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la bille.
   (c) Déterminez la période des petites oscillations de la bille autour du point A.

Tournez la page.

ii. Dans un deuxième temps, on assimile toujours la bille à un point matériel mais on tient compte du frottement à l'intérieur du demi-cylindre. Le coefficient de frottement est μ.

   (a) Relevez toutes les forces agissant sur la bille avec leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou de liaison, force conservative).

   (b) Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la bille.

   (c) Montrez que la bille ne se met en mouvement que si $\operatorname{tg}\theta_0 > \mu$.

   (d) À partir des équations linéarisées obtenues sous l'hypothèse des petites oscillations autour du point A, déterminez la loi du mouvement du point matériel dans le cas particulier où $\theta_0 = 2\mu$.

iii. On assimile ensuite la bille à un solide parfaitement sphérique de rayon $a < R$ roulant sans glisser sur la surface intérieure du demi-cylindre. Le coefficient de frottement est μ. Le tenseur central d'inertie de la bille est donné par

$$\mathbf{J}_{\mathrm{C}} = \frac{2}{5} m a^2 \mathbf{I}$$

   (a) Relevez toutes les forces agissant sur la bille avec leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou de liaison, force conservative).

   (b) Déterminez le nombre de degrés de liberté de la bille et introduisez la(les) coordonnée(s) généralisée(s) appropriée(s) pour en décrire complètement le mouvement.

   (c) Écrivez la condition de roulement sans glissement de la bille sur la surface intérieure du demi-cylindre.

   (d) Écrivez le théorème de l'énergie cinétique dans des axes absolus placés au centre O du demi-cylindre. Déduisez-en une intégrale première.

   (e) Montrez que le mouvement est fait d'oscillations périodiques d'amplitude θ_0 autour de la verticale inférieure.

   (f) Déterminez la période des petites oscillations de la bille autour du point A. Pourquoi cette période est-elle différente de celle d'un pendule simple de longueur $R - a$?

   (g) Écrivez le théorème de la quantité de mouvement.

   (h) Sous l'hypothèse des petites oscillations autour du point A, déterminez la valeur maximale de l'angle initial θ_0 compatible avec le roulement sans glissement.

SOLUTION

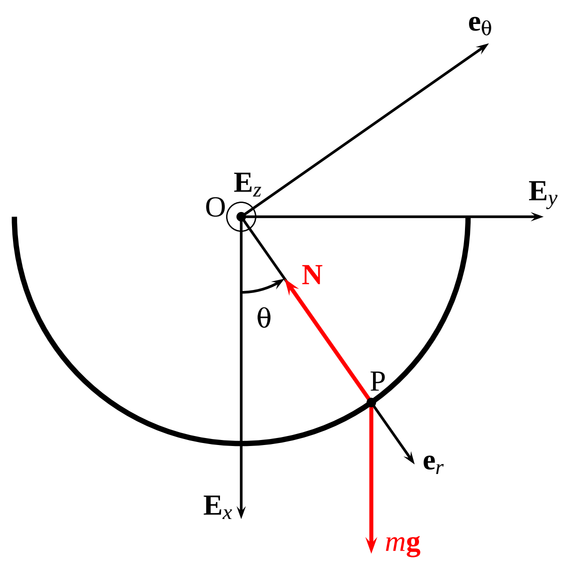
Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. (a) Les forces agissant sur la bille sont

- $m\mathbf{g}$: la force de pesanteur, force appliquée conservative dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_r$: la force de liaison normale au demi-cylindre vu l'absence de frottement.



(b) L'équation de Newton pour la bille s'écrit (voir figure)

$$m\ddot{\mathbf{s}}_P = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$$

où

$$\mathbf{s}_P = R\mathbf{e}_r$$

soit

$$mR\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = mg\cos\theta\mathbf{e}_r - mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta + N\mathbf{e}_r$$

(c) Projetant cette équation sur $\mathbf{e}_\theta$, on obtient

$$R\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

c'est-à-dire, dans le cas de petites oscillations ($\sin\theta \sim \theta$, $\theta \to 0$),

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

soit

$$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

où A et B sont des constantes et où on a posé

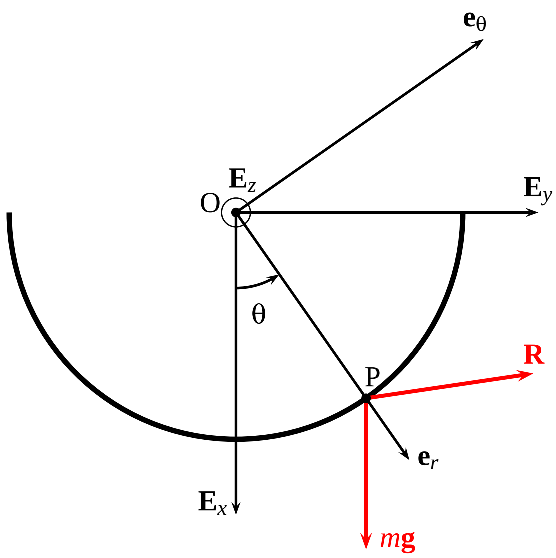
$$\omega^2 = \frac{g}{R}$$

La période d'oscillation est donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

ii. (a) Les forces agissant sur la bille sont

- $m\mathbf{g}$: la force de pesanteur, force appliquée conservative dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T} = N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$: la force de liaison de direction inconnue.



(b) L'équation de Newton pour la bille s'écrit (voir figure)

$$m\ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}$$

où

$$\mathbf{s}_\mathrm{P} = R\mathbf{e}_r$$

soit

$$mR\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = mg\cos\theta\mathbf{e}_r - mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta + N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$$

Projetant cette équation sur $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$, on obtient

$$N = -mR\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \tag{1}$$

et

$$T = mR\ddot{\theta} + mg\sin\theta \tag{2}$$

(c) La bille restera au repos à sa position initiale si la configuration $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ vérifie les équations (1)-(2) avec $|T| \leq \mu|N|$, c'est-à-dire si

$$mg\sin\theta_0 \leq \mu mg\cos\theta_0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{tg}\,\theta_0 \leq \mu$$

La bille ne se mettra donc en mouvement que si $\mathrm{tg}\,\theta_0 > \mu$.

(d) Dans le cas où la bille glisse, la loi du frottement s'écrit

$$\mathbf{T} = T\mathbf{e}_\theta = -\mu|N|\frac{\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{P}}{||\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{P}||}$$

où

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Le mouvement initial se fera forcément vers le bas ($\dot{\theta} < 0$) de sorte que

$$T = \mu|N| = \mu(mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta) \qquad (3)$$

L'élimination de T entre (2) et (3) donne

$$R\ddot{\theta} + g\sin\theta = \mu(R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta)$$

soit, après linéarisation,

$$R\ddot{\theta} + g\theta = \mu g$$

La loi des petits mouvements s'écrit alors

$$\theta(t) = \mu\left(1 + \cos\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

en prenant en compte les conditions initiales $\theta_0 = 2\mu$ et $\dot{\theta} = 0$.
Cette première phase prend fin quand la vitesse s'annule. On a

$$\dot{\theta}(t) = -\mu\sqrt{\frac{g}{R}}\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t$$

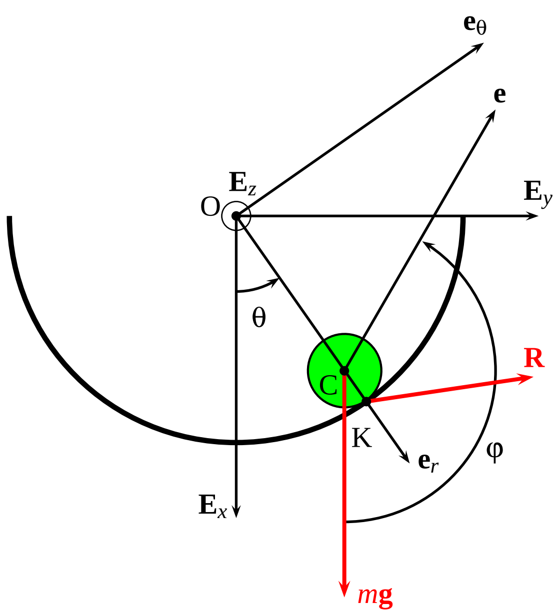
de sorte que

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

À ce moment, $\theta = 0$ et, en vertu de la conclusion du point (c), la bille s'arrête définitivement à la position verticale inférieure.

iii. (a) Les forces extérieures agissant sur la bille sont

- $m\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur agissant sur la bille, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C de la bille et dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T} = N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$: la force de liaison de direction inconnue agissant au point de contact K entre la bille et le demi-cylindre.



(b) La bille est un solide en mouvement plan. Elle possède donc au maximum 3 ddl. Le mouvement sur le demi-cylindre et la condition de roulement sans glissement constituent deux liaisons de sorte que la bille ne possède qu'un seul degré de liberté. Pour décrire le mouvement de la bille, on introduit l'angle θ qui mesure la position du centre d'inertie par rapport à la verticale inférieure et l'angle φ qui mesure la rotation de la bille autour de son centre d'inertie (voir figure).

(c) La condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (R-a)\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge a\mathbf{e}_r = \mathbf{0}$$

soit

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = (R-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$$

ou encore

$$(R-a)\dot{\theta} = -a\dot{\varphi}$$

(d) Le théorème de l'énergie cinétique en O s'écrit

$$\dot{T}_\mathrm{O} = P_\mathrm{O} = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} + m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = -\frac{dV_{mg}}{dt}$$

où on a tenu compte de la condition de roulement sans glissement et du caractère conservatif de la force de pesanteur. On a

$$V_{mg} = -mg(R-a)\cos\theta$$

et

$$T_\mathrm{O} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C}\|^2 + T_\mathrm{C} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C}\|^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{J}_\mathrm{C}\cdot\dot{\varphi}\mathbf{E}_z = \frac{m(R-a)^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{2ma^2}{10}\dot{\varphi}^2$$

soit, en utilisant la condition de roulement sans glissement,

$$T_\mathrm{O} = \frac{7m(R-a)^2\dot{\theta}^2}{10}$$

Introduisant ces valeurs dans le théorème, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{7m(R-a)^2\dot{\theta}^2}{10} - mg(R-a)\cos\theta\right] = 0 \tag{4}$$

qui donne directement l'intégrale première de conservation de l'énergie

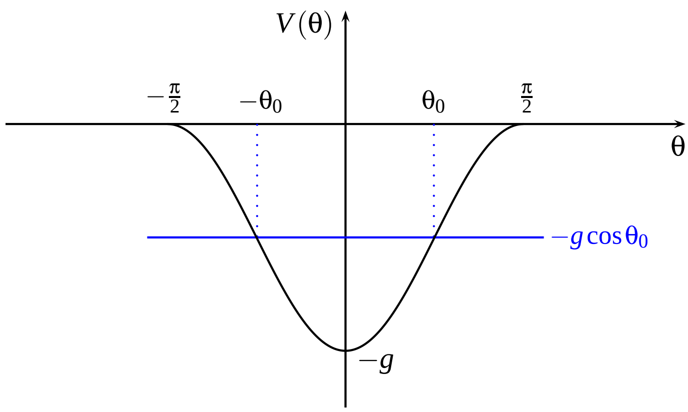
$$\frac{7m(R-a)^2\dot{\theta}^2}{10} - mg(R-a)\cos\theta = -mg(R-a)\cos\theta_0$$

où on a pris en compte les conditions initiales $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$ pour déterminer la valeur de la constante.

(e) Après simplification, l'intégrale première obtenue s'écrit

$$\frac{7}{10}(R-a)\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = -g\cos\theta_0$$

et peut être étudiée sur le diagramme du potentiel $V(\theta) = -g\cos\theta$.



Le mouvement de la bille consiste en des oscillations périodiques d'amplitude θ_0 autour de la position verticale inférieure.

(f) L'équation (4) s'écrit

$$\frac{7}{5}(R-a)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

Dans le cas de petites oscillations ($\sin\theta\sim\theta$, $\theta\to 0$), on obtient

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-a)}\theta=0 \tag{5}$$

La période des petites oscillations est donc

$$T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-a)}{5g}}$$

La période calculée est supérieure à celle du pendule simple de longueur $R-a$ qui vaudrait, dans les mêmes conditions,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R-a}{g}}$$

car le solide qui roule sans glisser utilise une partie de son énergie potentielle initiale pour son mouvement de rotation propre. Il en a donc moins pour son mouvement de translation et prend plus de temps pour une oscillation complèle.

(g) Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}}=m\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}=m\mathbf{g}+\mathbf{R}$$

soit

$$m(R-a)\ddot{\theta}\mathbf{e}_{\theta}-m(R-a)\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r=mg\cos\theta\mathbf{e}_r-mg\sin\theta\,\mathbf{e}_{\theta}+N\mathbf{e}_r+T\mathbf{e}_{\theta}$$

(h) Lors du roulement sans glissement, on doit avoir $|T|\leq\mu|N|$, où T et N sont les composantes tangentielle et normale de la force de liaison et μ le coefficient de frottement (statique) entre la bille et le demi-cylindre.

Sous l'hypothèse des petites oscillations, les projections du théorème de la quantité de mouvement sur $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_{\theta}$ donnent

$$N=-mg\cos\theta-m(R-a)\dot{\theta}^2\sim -mg$$

et, prenant en compte la relation (5),

$$T=mg\sin\theta+m(R-a)\ddot{\theta}\sim mg\theta-\frac{5}{7}mg\theta=\frac{2}{7}mg\theta$$

La condition $|T|\leq\mu|N|$ s'écrit donc, puisque l'amplitude des oscillations est θ_0,

$$\theta_0\leq\frac{7\mu}{2}$$