LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2023

MECA0003 - Mécanique Rationnelle

Exercice dirigé : post-test

1. **Déterminez les dimensions du produit qB. Justifiez.**

   Puisque $\mathbf{F} = q(\dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$, on a
   $$[qB] = \frac{[Force]}{[vitesse]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

2. **La force $\mathbf{F} = q(\dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$ est-elle conservative ? Justifiez.**

   Non, cette force n'est pas conservative car
   $$\mathbf{F} = q\,(\dot{\mathbf{s}} \wedge B\mathbf{e}_z) \neq -\nabla V(\mathbf{s})$$

3. **Déterminez la norme de la vitesse absolue de la particule au moment où elle atteint $\theta = \theta^*$ dans les conditions du point *ix* de l'étude du mouvement ($n = 2$, $\theta_0 = 0$, $v_{r,0} = 3a\Omega$).**

   La vitesse absolue de la particule s'écrit $\dot{\mathbf{s}} = \dfrac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}$.
   Dans les conditions envisagées, la position $\theta = \theta^*$ est un point de réflexion où $\dfrac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = \mathbf{0}$.
   On a donc
   $$\|\dot{\mathbf{s}}\| = \|\Omega \mathbf{e}_z \wedge r(\theta^*)\mathbf{e}_r\| = \|\Omega\, r(\theta^*)\mathbf{e}_\theta\| = \Omega 2a\cos\theta^* = 2a\Omega\cos\frac{\pi}{3} = a\Omega$$

   De façon alternative, la vitesse absolue de la particule se calcule suivant
   $$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + (\Omega + \dot{\theta})\mathbf{e}_z \wedge r\,\mathbf{e}_r = 2a\dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{e}_r + (\Omega + \dot{\theta})2a\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$$
   Dans les conditions envisagées, la position $\theta = \theta^*$ est un point de réflexion où $\dot{\theta} = 0$. On a donc
   $$\|\dot{\mathbf{s}}\| = \|\Omega 2a\,\cos\theta^* \mathbf{e}_\theta\| = 2a\Omega\cos\frac{\pi}{3} = a\Omega$$

4. **La loi du mouvement des petites oscillations autour de $\theta = 0$ quand $n > -1$ s'écrit**
   $$\theta(\tau) = C_1 \sin\left(\sqrt{1+n}\,\tau\right) + C_2\cos\left(\sqrt{1+n}\,\tau\right)$$
   où $\tau = \Omega t$. Quelle est la période de ces petites oscillations ?
   $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Omega\sqrt{1+n}}$$