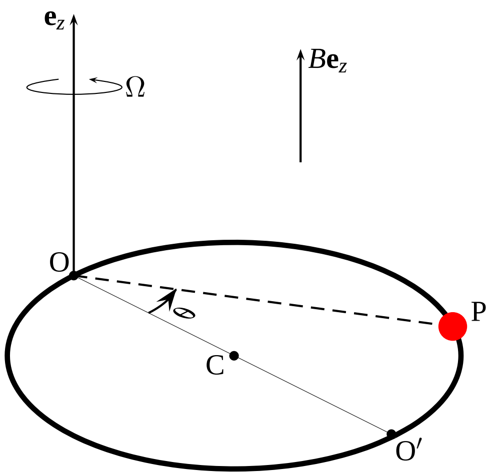
Une particule de masse m et de charge électrique q, assimilable à un point matériel P, se déplace sans frottement dans le champ de la pesanteur sur un rail circulaire de rayon a situé dans un plan horizontal.

Le rail tourne à la vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe vertical passant par un de ses points noté O.

L'équation du rail, dans un système de coordonnées polaires centré en O, est donnée par $r = 2a\cos\theta$ (voir dessin).

La particule et le rail sont plongés dans un champ d'induction magnétique verticale constante et uniforme $B\mathbf{e}_z$ ($B < 0$ ou $B > 0$).



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système et introduisez une (des) coordonnée(s) généralisée(s) indépendante(s) permettant de décrire le mouvement de la particule.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur la particule et citez-en les caractéristiques principales (direction, force appliquée/force de liaison, force conservative).

iii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement.

iv. Exprimez l'équation différentielle vectorielle écrite au point précédent en fonction des vitesse et accélération relatives de la particule par rapport au rail.

v. Déterminez une intégrale première scalaire du mouvement en précisant son interprétation physique éventuelle.

vi. Montrez que l'intégrale première obtenue ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - (1+n)\cos^2\theta = C$$

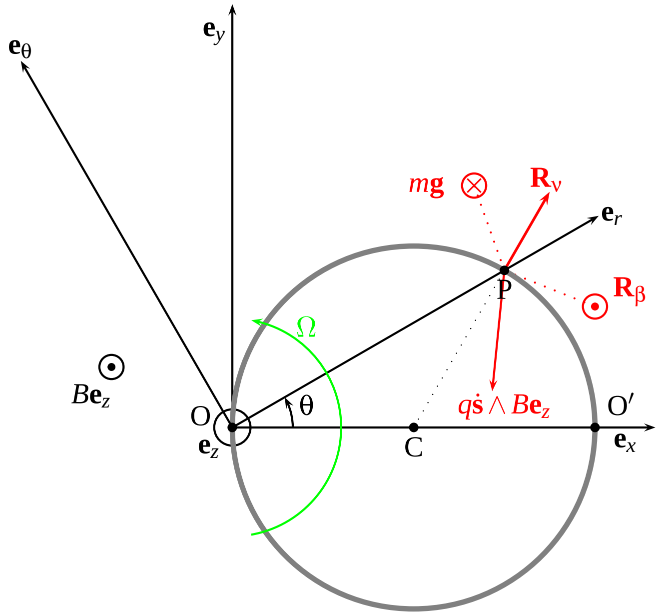
où C désigne une constante, n un nombre sans dimension à préciser et $\tau = \Omega t$ est un temps adimensionnel.

vii. En discutant en fonction du paramètre n et de la constante C, étudiez les différents mouvements possibles sur un diagramme de potentiel. Précisez les éventuelles positions d'équilibre relatif et leur stabilité.

viii. Dans le cas où $n > -1$, déterminez la pulsation des petites oscillations de la particule autour de $\theta = 0$.

ix. Si $n = 2$ et si la particule est lancée sur le rail dans le sens trigonométrique à partir du point O′ ($\theta = 0$) avec une vitesse relative par rapport au rail de norme $v_r = 3a\Omega$, déterminez l'amplitude θ^* de ses oscillations sur le rail.

x. Dans les mêmes conditions qu'à l'item précédent, déterminez l'expression intégrale de la période d'oscillation du point matériel.



i. Le système étudié est un point matériel astreint à se déplacer sur un rail dont le mouvement est connu. Il est soumis à 2 liaisons et possède donc un seul degré de liberté. Son mouvement peut être décrit par la seule coordonnée généralisée θ repérant sa position sur le rail, comme indiqué sur le dessin ci-dessus.

ii. Les forces appliquées sur la particule sont
- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$, la force de pesanteur, conservative ;
- $\mathbf{F} = q\,(\dot{\mathbf{s}} \wedge B\mathbf{e}_z)$, force non conservative mais développant une puissance nulle puisque perpendiculaire au vecteur vitesse de la particule.

La force de liaison est normale à la courbe de guidage et se décompose en
- $\mathbf{R}_\nu$, force de liaison agissant selon la normale principale au rail ;
- $\mathbf{R}_\beta = R_\beta\,\mathbf{e}_z$, force de liaison agissant selon la binormale au rail.

iii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement de la particule s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -mg\mathbf{e}_z + q\,(\dot{\mathbf{s}} \wedge B\mathbf{e}_z) + \mathbf{R}_\nu + R_\beta\mathbf{e}_z$$

où $\mathbf{s} = \mathbf{OP}$.

iv. Introduisons la dérivée relative $\dfrac{\delta}{\delta t}$ évaluée dans les axes $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ liés au rail en rotation à la vitesse angulaire Ω constante autour de $\mathbf{e}_z$. La formule de Poisson permet d'écrire

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}$$

et donc

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}\right) + \Omega\mathbf{e}_z \wedge \left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}\right) = \frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega\mathbf{e}_z \wedge \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega^2(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{s})\mathbf{e}_z - \Omega^2\mathbf{s}$$

où $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{s} = 0$ puisque le rail est situé dans un plan horizontal.

L'équation différentielle s'écrit donc

$$\begin{aligned} m\left[\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega\mathbf{e}_z \wedge \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} - \Omega^2\mathbf{s}\right] &= -mg\mathbf{e}_z + q\left(\left[\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}\right] \wedge B\mathbf{e}_z\right) + \mathbf{R}_\nu + R_\beta\mathbf{e}_z \\ &= -mg\mathbf{e}_z + q\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} \wedge B\mathbf{e}_z + q\Omega B\,\mathbf{s} - qB\Omega(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{s})\mathbf{e}_z + \mathbf{R}_\nu + R_\beta\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

soit, finalement, puisque le rail est horizontal,

$$m\left[\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega\mathbf{e}_z \wedge \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} - \Omega^2\mathbf{s}\right] = -mg\mathbf{e}_z + q\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} \wedge B\mathbf{e}_z + q\Omega B\,\mathbf{s} + \mathbf{R}_\nu + R_\beta\mathbf{e}_z$$

v. Multipliant l'équation précédente scalairement par la vitesse relative, on obtient

$$m\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\cdot\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2}-m\Omega^2\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\cdot\mathbf{s}=q\Omega B\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\cdot\mathbf{s}$$

où on a tenu compte de ce que la vitesse relative est tangente à la courbe et donc perpendiculaire à ses normales.

Cette équation peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta t}\left(\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2\right)-\frac{1}{2}\left(\Omega^2+\frac{q\Omega B}{m}\right)\frac{\delta}{\delta t}\left(\|\mathbf{s}\|^2\right)=0$$

soit, après intégration temporelle,

$$\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2-\left(\Omega^2+\frac{q\Omega B}{m}\right)\|\mathbf{s}\|^2=\text{constante} \tag{1}$$

Cette intégrale première ne représente pas la conservation de l'énergie car la force de liaison $\mathbf{R}_\mathrm{v}$ développe une puissance non nulle au cours du mouvement.

vi. On a

$$\mathbf{s}=2a\cos\theta\,\mathbf{e}_r\quad\text{et}\quad\|\mathbf{s}\|^2=4a^2\cos^2\theta$$

$$\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}=-2a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{e}_r+2a\dot\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta\quad\text{et}\quad\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2=4a^2\dot\theta^2$$

soit, en remplaçant dans (1),

$$4a^2\dot\theta^2-\left(\Omega^2+\frac{q\Omega B}{m}\right)4a^2\cos^2\theta=\text{constante}$$

Introduisons la variable sans dimension $\tau=\Omega t$, on a

$$\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\Omega\frac{d}{d\tau}$$

soit

$$4a^2\Omega^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-\left(\Omega^2+\frac{q\Omega B}{m}\right)4a^2\cos^2\theta=\text{constante}$$

ou encore

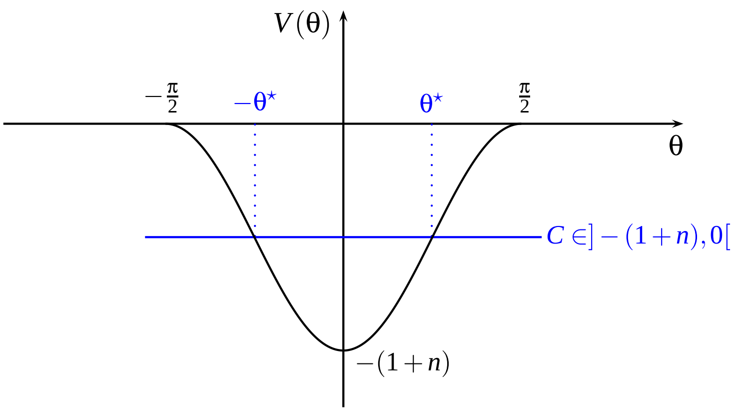
$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-(1+n)\cos^2\theta=C \tag{2}$$

où

$$n=\frac{qB}{m\Omega}$$

vii. À partir de l'intégrale première (2), le mouvement peut être discuté sur un diagramme de potentiel en considérant les variations de $V(\theta)=-(1+n)\cos^2\theta$ en fonction de $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$, puisque seules ces valeurs de θ correspondent à des positions de la particule sur le rail.

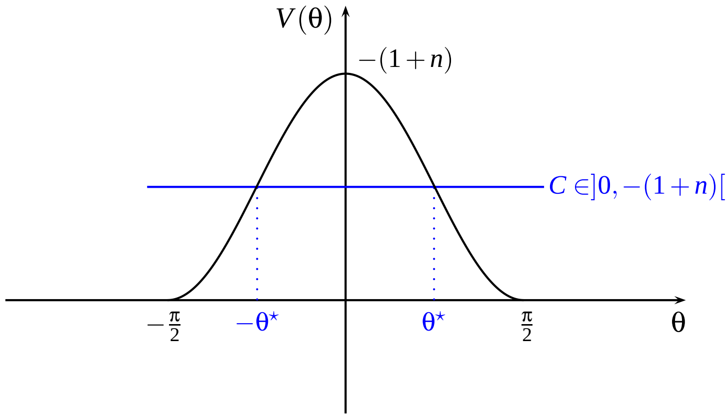
Pour $n>-1$, on a



La nature du mouvement relatif peut être discutée en fonction de la valeur de la constante C apparaissant dans (2). Cette constante dépend des conditions initiales.

- Si $C = -(1+n)$, la particule est en équilibre relatif (marginalement) stable en $\theta = 0$ (point O′).
- Si $C \in]-(1+n), 0[$, θ varie entre $-\theta^\star$ et $\theta^\star$ et le mouvement est périodique autour de O′.
- Si $C = 0$, la particule est en équilibre instable en $\theta = \pm\pi/2$ (point O) si elle s'y trouve initialement ou réalise un mouvement asymptotique vers O sinon.
- Si $C > 0$, toutes les valeurs de θ sont accessibles. La vitesse relative $\dfrac{d\theta}{d\tau}$ ne s'annule jamais et le mouvement est révolutif.

Pour $n < -1$, on a



La nature du mouvement relatif peut être discutée en fonction de la valeur de la constante C apparaissant dans (2). Cette constante dépend des conditions initiales.

- Si $C = 0$, la particule est en équilibre (marginalement) stable en $\theta = \pm\pi/2$ (point O).
- Si $C \in]0, -(1+n)[$, θ varie entre $-\theta^\star$ et $\theta^\star$ et le mouvement est périodique autour de O.
- Si $C = -(1+n)$, la particule est en équilibre relatif instable en $\theta = 0$ (point O′) si elle s'y trouve initialement ou réalise un mouvement asymptotique vers O′ sinon.
- Si $C > -(1+n)$, toutes les valeurs de θ sont accessibles. La vitesse relative $\dfrac{d\theta}{d\tau}$ ne s'annule jamais et le mouvement est révolutif.

Pour $n = -1$, $V(\theta) = 0$.

- Si $C = 0$, l'équilibre relatif est indifférent, possible en chaque point du cercle. Dans ce cas, la nature de l'équilibre peut être obtenue par l'étude des perturbations η d'une position θ_{eq} quelconque. On a $\theta = \theta_{eq} + \eta$. L'équation différentielle donnant l'évolution de la perturbation s'obtient en dérivant (2) par rapport à τ. On a

  $$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \eta = A\tau + B$$

  où A et B sont des constantes. On en conclut que l'équilibre est un équilibre relatif faiblement instable.
- Si $C > 0$, toutes les valeurs de θ sont accessibles. Le mouvement est révolutif.

viii. Par dérivation de (2) par rapport à τ, on obtient, après simplification,

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (1+n)\cos\theta\sin\theta = 0$$

Dans le cadre de petites oscillations autour de $\theta = 0$, cette équation peut être approchée par

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (1+n)\theta = 0$$

Dans le cas où $n > -1$, les solutions de cette équation s'écrivent

$$\theta(\tau) = C_1 \sin\left(\sqrt{1+n}\,\tau\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1+n}\,\tau\right)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. La particule décrit donc des oscillations de pulsation

$$\omega = \sqrt{1+n}\,\Omega$$

ix. Dans le cas où $n = 2$, l'intégrale première (2) s'écrit

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 3\cos^2\theta = C$$

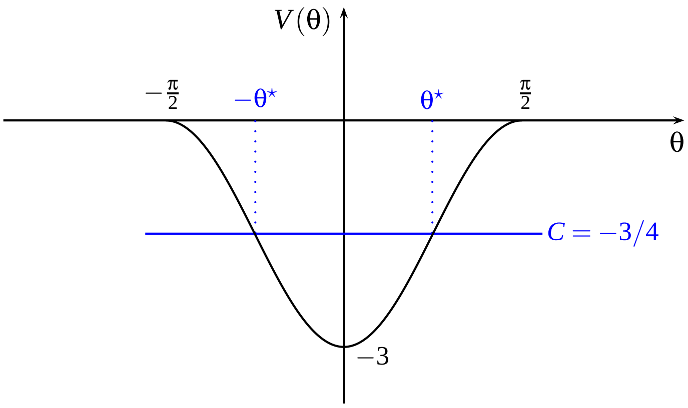
La constante C peut être déterminée grâce aux conditions initiales $\theta = 0$ et

$$\left\|\frac{\delta s}{\delta t}\right\| = 2a\dot{\theta} = v_r = 3a\Omega \qquad \text{soit} \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\dot{\theta}}{\Omega} = \frac{3}{2}$$

ce qui donne

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 3\cos^2\theta = -\frac{3}{4} \tag{3}$$

Le diagramme de potentiel correspondant à ce cas peut être esquissé comme suit



L'amplitude des oscillations autour de $\theta = 0$ est déterminée en résolvant $V(\theta^*) = C$, soit

$$-3\cos^2\theta^* = -\frac{3}{4} \qquad \text{de sorte que} \qquad \theta^* = \frac{\pi}{3}$$

x. En séparant les variables, l'intégrale première (3) conduit à

$$d\tau = \frac{d\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta - \frac{3}{4}}}$$

La période T des oscillations d'amplitude $\theta^* = \pi/3$ est donc donnée par

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega T} d\tau = \frac{4}{\Omega}\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta - \frac{3}{4}}} = \frac{8\sqrt{3}}{3\Omega}\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}$$