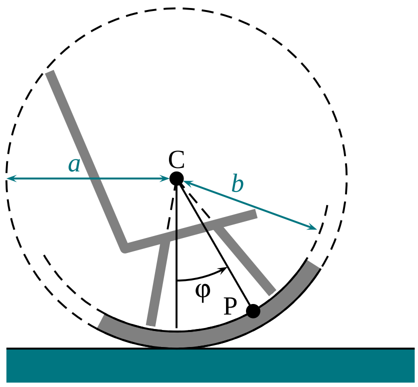
Décembre 2023

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Prof. Éric J.M.DELHEZ

On étudie le mouvement du Père Noël qui s'est assoupi sur son fauteuil à bascule quand Foufou vient se placer sur le patin/pied du fauteuil. Le fauteuil roule sans glisser sur le sol en un mouvement plan. Le patin du fauteuil est assimilé à un arc de cercle de rayon a et d'épaisseur $(a-b)$ (où $b<a$). Le Père Noël et le fauteuil forment un solide indéformable de masse M dont le centre d'inertie est précisément situé au centre de cet arc de cercle. On note J le moment d'inertie du solide constitué du Père Noël et du fauteuil pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement passant par son centre d'inertie. Foufou est assimilé à un point matériel P de masse m qui glisse sans frottement sur la face supérieure du patin. Sa position est repérée par l'angle φ mesuré par rapport à la verticale (voir figure).



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système total (solide + point matériel) et introduisez des coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur le solide et sur le point matériel en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/de liaison, force conservative, force externe/interne par rapport au système total).

iii. Déterminez la condition de roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal.

iv. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement **pour le système total**.

v. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement **pour le point matériel**.

vi. Écrivez* le théorème du moment cinétique **pour le solide** par rapport à un repère centré en son centre d'inertie et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels.

vii. À partir des équations écrites ci-dessus, donnez un système de 2 équations différentielles du second ordre à deux inconnues ne faisant pas intervenir les forces de liaison inconnues et permettant, avec la condition de roulement sans glissement, de décrire complètement le mouvement du système.

viii. Déterminez les configurations d'équilibre du système.

ix. En introduisant des petites perturbations de ces configurations, déterminez la période des petites oscillations du point matériel autour de celles-ci.

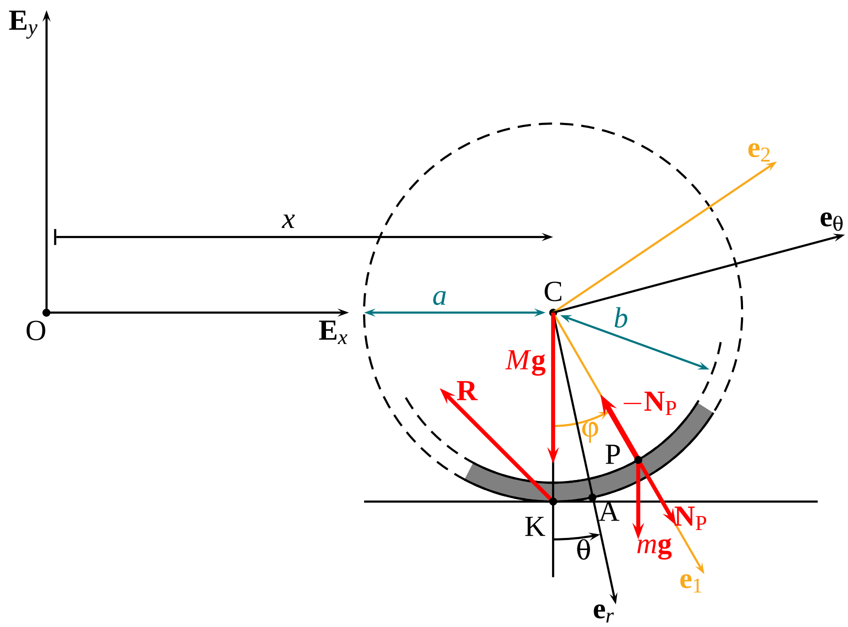
x. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique **pour le système total** par rapport à un repère inertiel et déduisez-en une intégrale première dont vous préciserez la signification physique.

xi. Étudiez le mouvement du solide si le point matériel est rigidement fixé sur celui-ci et si, initialement, le système est au repos alors que le point matériel se trouve à une position faisant un angle φ_0 avec la verticale inférieure et que le fauteuil du Père Noël n'est pas incliné.

xii. Quelle est dans ce cas l'inclinaison maximale du fauteuil du Père Noël au cours du mouvement ?

---

* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.



i. Le système étudié comprend un solide et un point matériel.

Le solide en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté mais le contact avec le sol et la condition de roulement sans glissement introduisent 2 liaisons. Le solide possède donc un seul degré de liberté.

Le point matériel est astreint à se déplacer sur une courbe (cercle de rayon b) dont le mouvement est connu si celui du solide est connu. Il possède donc aussi un seul degré de liberté.

Au total, le système étudié possède deux degrés de liberté.

Le mouvement du solide peut être décrit par la coordonnée x mesurant le déplacement horizontal de son centre d'inertie et par l'angle θ mesurant la rotation autour du centre d'inertie de l'axe de symétrie AC du patin par rapport à la verticale CK (voir figure). Ces deux coordonnées sont liées par la condition de roulement sans glissement (voir iii.). Le mouvement du point est décrit par l'angle φ donné dans l'énoncé.

ii. Les forces agissant sur le solide sont :

- $M\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
- $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K ;
- $\mathbf{N}_\mathrm{P} = N_\mathrm{P}\,\mathbf{e}_1$, la force de liaison normale exercée par le point P sur le solide en l'absence de frottement.

Les forces agissant sur le point matériel sont :

- $m\mathbf{g}$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas ;
- $-\mathbf{N}_\mathrm{P} = -N_\mathrm{P}\,\mathbf{e}_1$, la force de liaison normale exercée par le solide sur le point P.

Les forces $\pm\mathbf{N}_\mathrm{P}$ sont des forces internes au système constitué du solide et du point matériel.

iii. Le roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels du solide et du plan fixe en contact au point géométrique K à un instant donné, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^\mathrm{sol} = \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^\mathrm{plan}$$

Puisque le plan est immobile, on a $\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^\mathrm{plan} = \mathbf{0}$

Le vecteur position d'un point quelconque du pourtour du solide, par exemple A, s'écrit

$$\mathbf{s}_\mathrm{A} = x\mathbf{E}_x + a\mathbf{e}_r$$

et, puisque le vecteur de Poisson du solide est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{A} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

En K, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{E}_y$ et $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{E}_x$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{sol}} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x = \mathbf{0}$$

Dès lors, le roulement sans glissement du solide sur le plan s'exprime par la relation

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{1}$$

iv. Le théorème de la quantité de mouvement pour le système total s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = \dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{sol}} + \dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} = M\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + m\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = \mathbf{G}^{ext} = M\mathbf{g} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où

$$\mathbf{s}_{\mathrm{C}} = x\mathbf{E}_x \quad \text{donc} \quad \ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = \ddot{x}\mathbf{E}_x$$

et, puisque le vecteur de Poisson des axes liés au point matériel est $\dot{\varphi}\mathbf{E}_z$,

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}} = x\mathbf{E}_x + b\mathbf{e}_1,\ \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = \dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = \ddot{x}\mathbf{E}_x + b\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - b\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1$$

Finalement, on a

$$(M+m)\ddot{x}\mathbf{E}_x + mb\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - mb\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1 = -(M+m)g\mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x \tag{2}$$

v. Le théorème de la quantité de mouvement pour le point matériel s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} = m\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = m\mathbf{g} - \mathbf{N}_{\mathrm{P}}$$

soit

$$m\ddot{x}\mathbf{E}_x + mb\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - mb\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1 = -mg\mathbf{E}_y - N_{\mathrm{P}}\mathbf{e}_1 \tag{3}$$

vi. Le théorème du moment cinétique pour le solide par rapport à un système d'axes d'orientation fixe centré en son centre d'inertie s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}}$$

où

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}} = -a\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R} = -a\mathbf{E}_y \wedge (N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x) = aT\mathbf{E}_z$$

Puisque le vecteur de Poisson du solide est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, il vient

$$\mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = J\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

et, en projetant le théorème sur l'axe $\mathbf{E}_z$,

$$J\ddot{\theta} = aT \tag{4}$$

vii. Il est possible d'obtenir une première équation ne faisant pas intervenir les forces de liaison inconnues en projetant l'équation (3) sur l'axe $\mathbf{e}_2$, perpendiculaire à la force normale. On a

$$m\ddot{x}\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{e}_2 + mb\ddot{\varphi} = -mg\mathbf{E}_y \cdot \mathbf{e}_2$$

soit

$$m\ddot{x}\cos\varphi + mb\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \tag{$\diamondsuit$}$$

Ensuite, la projection de l'équation (2) sur l'axe $\mathbf{E}_x$ donne

$$(M+m)\ddot{x} + mb\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_x - mb\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_x = T$$

soit, en utilisant l'équation (4) pour éliminer T et la condition de roulement sans glissement (1) pour éliminer θ,

$$(M+m)\ddot{x} + mb\ddot{\varphi}\cos\varphi - mb\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \frac{J\ddot{\theta}}{a} = -\frac{J\ddot{x}}{a^2}$$

c'est-à-dire

$$\left(M+m+\frac{J}{a^2}\right)\ddot{x} + mb\ddot{\varphi}\cos\varphi - mb\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \tag{$\spadesuit$}$$

Les équations ($\diamondsuit$) et ($\spadesuit$) constituent un système de 2 équations différentielles pour x et φ ne faisant pas intervenir les forces de liaison inconnues et permettant, avec la condition de roulement sans glissement, de décrire complètement le mouvement du système.

viii. Les configurations d'équilibre s'obtiennent en annulant les vitesses et les accélérations dans les équations ($\diamondsuit$) et ($\spadesuit$) décrivant le mouvement. On en déduit la seule condition $\sin\varphi = 0$. Toutes les configurations $(x,\varphi) = (x_{eq}, 0)$ sont donc des configurations d'équilibre du système. La seule valeur possible pour φ à l'équilibre est $\varphi = 0$ car la position $\varphi = \pi$ n'est pas physiquement réalisable. L'équilibre est par contre indifférent pour la position du disque.

ix. Le mouvement du système est décrit par les équations ($\diamondsuit$) et ($\spadesuit$), soit

$$\begin{cases} \left(M+m+\dfrac{J}{a^2}\right)\ddot{x}+mb\ddot{\varphi}\cos\varphi-mb\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0 \\ m\ddot{x}\cos\varphi+mb\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi \end{cases}$$

Les équations décrivant l'évolution de petites perturbations des configurations d'équilibre, $x = x_{eq}+\eta_1$ et $\varphi=\eta_2$, s'écrivent

$$\begin{cases} \left(M+m+\dfrac{J}{a^2}\right)\ddot{\eta}_1+mb\ddot{\eta}_2\cos\eta_2-mb\dot{\eta}_2^2\sin\eta_2=0 \\ m\ddot{\eta}_1\cos\eta_2+mb\ddot{\eta}_2=-mg\sin\eta_2 \end{cases}$$

En linéarisant ces équations, on obtient

$$\begin{cases} \left(M+m+\dfrac{J}{a^2}\right)\ddot{\eta}_1+mb\ddot{\eta}_2=0 \\ m\ddot{\eta}_1+mb\ddot{\eta}_2=-mg\eta_2 \end{cases}$$

De la première équation, on tire

$$\ddot{\eta}_1=-\frac{mb}{M+m+\dfrac{J}{a^2}}\,\ddot{\eta}_2$$

Injectant cette expression dans la seconde, on a

$$mb\left(1-\frac{m}{M+m+\dfrac{J}{a^2}}\right)\ddot{\eta}_2=-mg\eta_2$$

qui se simplifie en

$$b\left(\frac{M+\dfrac{J}{a^2}}{M+m+\dfrac{J}{a^2}}\right)\ddot{\eta}_2=-g\eta_2 \qquad \text{soit} \qquad \ddot{\eta}_2+\frac{g}{b}\left(\frac{M+m+\dfrac{J}{a^2}}{M+\dfrac{J}{a^2}}\right)\eta_2=0$$

La solution de cette équation s'écrit

$$\eta_2=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

où A et B sont des constantes et où on a posé

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{b}\left(\frac{M+m+\dfrac{J}{a^2}}{M+\dfrac{J}{a^2}}\right)}$$

La période des petites oscillations du point matériel est $T=2\pi/\omega$.

x. Le théorème de l'énergie cinétique au point fixe O pour le système total s'écrit

$$\dot{T}_{\mathrm{O}}=\dot{T}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{sol}}+\dot{T}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}}=P_{\mathrm{O}}^{ext+int}=M\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}+m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}}+\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}+\mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{sol}}-\mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}}$$

D'une part, la puissance développée par les différentes forces est donnée par

$$\begin{aligned}
M\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} &= -Mg\mathbf{E}_y\cdot\dot{x}\mathbf{E}_x = 0\\
m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} &= -mg\mathbf{E}_y\cdot(\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2) = -mgb\dot{\varphi}\sin\varphi\\
\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} &= \mathbf{0}\ \text{ puisque }\ \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{sol}} - \mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} &= \mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot(\dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z\wedge b\mathbf{e}_1) - \mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot(\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2)\\
&= \mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot(\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\theta}\mathbf{e}_2) - \mathbf{N}_{\mathrm{P}}\cdot(\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2) = N_{\mathrm{P}}\mathbf{e}_1\cdot b(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\mathbf{e}_2 = 0
\end{aligned}$$

D'autre part, l'énergie cinétique associée aux deux éléments du système peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}}\|^2 = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2)\cdot(\dot{x}\mathbf{E}_x + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2)\\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 + 2b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)
\end{aligned}$$

et

$$T_{\mathrm{O}}^{\mathrm{sol}} = \frac{1}{2}M\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2 + T_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Regroupant ces résultats, le théorème peut être exprimé sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 + 2b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)\right] = -mgb\dot{\varphi}\sin\varphi$$

On en tire l'intégrale première de conservation de l'énergie du système total

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 + 2b\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) - mgb\cos\varphi = E$$

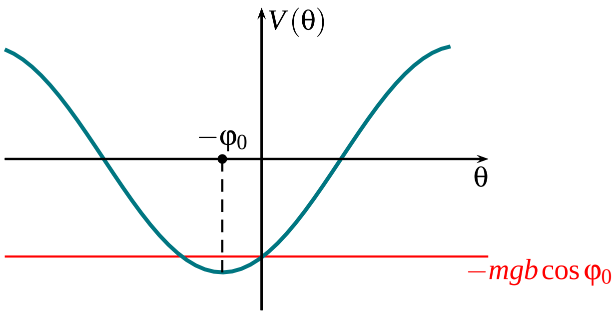
xi. Si le point matériel est rigidement fixé au solide, il tourne avec celui-ci et $\dot{\varphi} = \dot{\theta}$. En intégrant cette relation entre les vitesses angulaires du point matériel et du solide, on obtient $\varphi = \theta + \text{constante}$ où la constante peut être déterminée en utilisant les conditions initiales $\varphi = \varphi_0$ et $\theta = 0$, soit $\varphi = \theta + \varphi_0$.
L'intégrale première de conservation de l'énergie peut alors s'écrire en fonction de la seule variable θ sous la forme

$$\frac{1}{2}\left[J + Ma^2 + ma^2 + mb^2 - 2mba\cos(\theta+\varphi_0)\right]\dot{\theta}^2 - mgb\cos(\theta+\varphi_0) = E$$

où on a aussi utilisé la condition de roulement sans glissement (1) pour éliminer x au profit de θ et où la constante E peut être déterminée en utilisant les conditions initiales $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$. On a alors

$$\frac{1}{2}\left[J + Ma^2 + ma^2 + mb^2 - 2mba\cos(\theta+\varphi_0)\right]\dot{\theta}^2 - mgb\cos(\theta+\varphi_0) = -mgb\cos\varphi_0$$

Le coefficient multipliant $\dot{\theta}$ étant strictement positif, le mouvement peut être étudié sur un diagramme de $V(\theta) = -mgb\cos(\theta+\varphi_0)$.



Le mouvement du fauteuil est constitué d'oscillations d'amplitude φ_0 autour de la position $\theta = -\varphi_0$.

xii. Les points de réflexion délimitant le puits de potentiel autour de $\theta = -\varphi_0$ correspondent aux solutions de

$$-mgb\cos(\theta+\varphi_0) = -mgb\cos\varphi_0$$

soit $\theta_1 = -2\varphi_0$ et $\theta_2 = 0$. Le fauteuil du Père Noël s'inclinera donc au maximum d'un angle $2\varphi_0$ au cours du mouvement.