

UNIVERSITÉ DE LIÈGE



Exercice intégré n° 1

La gravitation et la mécanique des corps célestes

Eric Delhez¹, Claude Jamar³, Géraldine Martin²,
Jacques Nihoul², Pierre Rochus³ et François Runday²

¹ Service de Mathématiques Générales

² Service de Mécanique Rationnelle

³ Centre Spatial de Liège

FÉVRIER 2000

Avant-propos.

Les cours/exercices intégrés sont des enseignements organisés dans le cadre d'un cours donné, dit cours pivot, sur un thème ciblé, par un groupe de professeurs titulaires de cours situés en amont (c'est-à-dire de cours dont les matières sont utilisées dans le cours pivot), de professeurs du cours pivot et de professeurs titulaires de cours situés en aval (c'est-à-dire de cours qui appliquent les matières vues au cours pivot).

Le but de ces cours/exercices intégrés est de montrer aux étudiants la continuité des enseignements et la nécessité de bien assimiler les bases fondamentales pour aborder le champ des applications.

Les cours/exercices intégrés font l'objet de cahiers séparés qui reprennent et développent les matières vues dans les différents cours de façon spécifique au thème choisi. Ces cahiers sont présentés de manière à être accessibles à un plus large public que celui des étudiants du cours pivot : étudiants d'une autre section ou année universitaire, enseignants, voire étudiants, de l'Enseignement Secondaire. Pour ce faire, les détails de certains calculs et démonstrations sont isolés en petits caractères dans des encadrés qui ne sont pas indispensables à une lecture générale du texte (Ces parties sont essentielles par contre à la compréhension de la matière approfondie pour les étudiants du cours pivot.).

1 Introduction.

Dans son remarquable petit traité sur *La Gravitation*, Pascoli (1995) explique très clairement la genèse de la loi d'Attraction Universelle :

“Les forces appliquées à un corps quelconque peuvent être très diverses. Mais on peut distinguer deux grandes catégories :

- i. Les forces *d'action de contact* : Si ces forces prennent naissance, par exemple, lors d'un choc, elles sont généralement brèves et très intenses ; on les appelle alors des percussions. Mais les actions de contact peuvent également s'exercer de façon continue, telles les forces de pression : pression atmosphérique, au sein d'un liquide, pression acoustique, etc.
- ii. Les forces *d'action à distance* : On peut en trouver des exemples simples et très nombreux parmi les phénomènes électromagnétiques qui nous entourent : action d'un courant sur une pièce d'acier (électro-aimant) ou une boussole, phénomènes électrostatiques divers, etc.

Les forces connues et étudiées à l'époque de Newton, c'est-à-dire à la fin du XVIIe siècle, étaient toutes sans exception des actions de contact entre les corps (ou discontinues : chocs, ou continues : pressions). Quant aux forces appartenant à la seconde catégorie, c'est-à-dire celle des actions à distance, on en ignorait tout ou presque tout.

Ceci peut paraître étrange quand on sait que l'action à distance d'un aimant sur une boussole avait été constatée depuis fort longtemps. Kepler avait même tenté, au début du XVIIe siècle, d'interpréter la gravitation comme une manifestation du magnétisme solaire.

Mais la logique et le rationalisme de l'époque voulaient que les actions à distance ne fussent pas considérées comme telles. Ainsi, estimait-on, selon les mots même de l'illustre mathématicien Leibniz, contemporain de Newton, qu' *un corps n'est jamais mû naturellement que par un autre corps qui le pousse en le touchant, le choc de deux corps représentant l'image même de l'évidence.*

Depuis Descartes, en effet, l'explication qui prévalait était celle des *milieux subtils*. Emplissant le Cosmos, baignant et pénétrant toute substance, ces milieux étaient les réels médiateurs des actions à distance.

La gravitation n'y échappait pas et le mouvement des planètes était régi par des tourbillons engendrés par des différences de structure des divers milieux subtils. C'est dire qu'on était très loin d'un embryon même de théorie gravitationnelle.

Quand Newton entreprit ses recherches sur la gravitation vers les années 1665-1666, il était lui-même encore très imbibé de cartésianisme : *Qu'un corps puisse agir sur un autre à distance à travers l'espace vide, sans milieu intermédiaire par lequel ou à travers duquel l'action pourrait être conduite de proche en proche de l'un à l'autre, est pour moi d'une si grande absurdité, que je crois qu'une telle idée ne peut pas même effleurer l'esprit d'un homme tant soit peu compétent en sciences.*

Entre 1600 et 1620, Kepler (1571-1630) établit les trois lois fondamentales qui régissent les mouvements des planètes autour du Soleil. Recherchant leur fondement causal, il introduit une force d'origine solaire inversement proportionnelle à la distance, l'*anima motrix*, mais sa méconnaissance du principe d'inertie fait qu'il l'utilise comme une poussée et non comme une force centrale d'attraction. A la même époque, Galilée (1564-1642) dévoile à ses contemporains la loi de la chute des corps et le principe d'inertie.

En 1666, Borelli (1608-1679) définit l'action gravitationnelle comme la résultante d'une tendance attractive et d'une force centrifuge, mais son interprétation reste cependant qualitative. La même année, Hooke (1635-1703) précise mieux que Galilée ne l'avait fait avant lui le principe d'inertie et démontre le parallélisme total existant entre les mouvements célestes et terrestres.

Enfin, en 1673, Huyghens (1629-1695) définit rigoureusement la notion de force centrifuge dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

Newton (1642-1727) put dès lors porter un coup fatal à la physique cartésienne. Par son célèbre *hypotheses non fingo* (je ne feins pas d'hypothèses) il balaya hors des sciences la physique des tourbillons et des milieux subtils que Descartes avait si péniblement édifiée.

En 1687, Newton écrivait : *Je n'ai pas été capable de découvrir l'origine de la gravité dans les phénomènes mais je ne feins pas d'hypothèses : tout ce qui n'est pas déduit des phénomènes est appelé une hypothèse et les hypothèses n'ont pas de place en philosophie naturelle. C'est assez pour nous que la gravité existe réellement et agisse selon les lois que nous avons obtenues et qui permettent d'expliquer tous les mouvements des corps célestes et de l'océan."*

2 La loi de la Gravitation.

La loi de la gravitation de Newton peut s'énoncer comme suit.

“Deux particules quelconques s'attirent mutuellement avec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.”

De prime abord, cette loi est facile à comprendre. On imagine deux masses ponctuelles (*particules*) m_1 et m_2 aux points S_1 et S_2 repérés, dans un système d'axes appropriés, par leurs *vecteurs positions* \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 (Fig. 1).¹

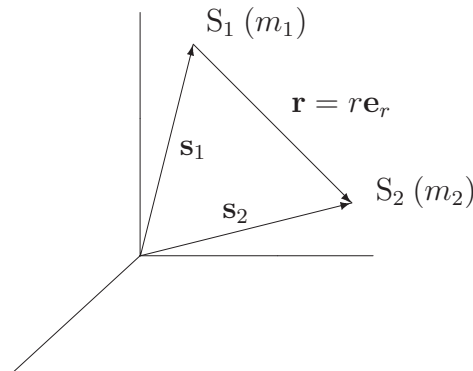


FIG. 1

La force exercée par S_1 sur S_2 est donnée par

$$\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2r^{-2}\mathbf{e}_r \quad (1)$$

où G est la constante de la gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Newton $\text{m}^2 \text{kg}^{-2}$).

Cette force peut se mettre sous la forme du gradient d'une fonction scalaire $V(r)$ représentant l'énergie potentielle associée à la configuration des deux masses ponctuelles (*e.g.* Delhez et Nihoul, 1996),

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\mathbf{e}_r \quad (2)$$

où V est donné par la formule

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (3)$$

À la force \mathbf{F}_{12} correspond une force $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ exercée par S_2 sur S_1 conformément au *Principe de l'Action et de la Réaction* (Fig. 2).

¹Dans ce texte, les vecteurs seront notés en caractères gras.

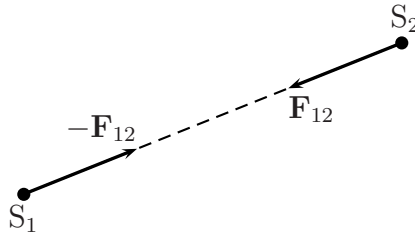


FIG. 2

Dès lors qu'on envisage des objets qui ne sont pas ponctuels, on peut s'interroger sur la façon d'exprimer la loi de la gravitation.

Considérant, pour commencer, le cas que Newton avait probablement à l'esprit des corps célestes séparés par une distance beaucoup plus grande que leurs propres dimensions (d'où la tentation de les considérer comme "ponctuels"), on peut montrer que l'ensemble des forces exercées par un corps I sur un corps II se réduit, avec une très bonne approximation, à la force de gravitation exercée entre deux points matériels situés aux *centres d'inertie* C_1 et C_2 des corps I et II et affectés des masses totales M_1 et M_2 de ces corps. La masse totale d'un corps est obtenue par intégration des masses élémentaires $dm = \rho d\Omega$ (où ρ est la masse par unité de volume, et $d\Omega$ l'élément de volume) sur tout le volume Ω occupé :

$$M = \iiint_{\Omega} dm = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega \quad (4)$$

Le centre d'inertie (*e.g.* Delhez et Nihoul, 1996) est défini comme le point C pour lequel

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dm = 0 \quad (5)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le vecteur position de l'élément de masse par rapport à C (Fig. 3).

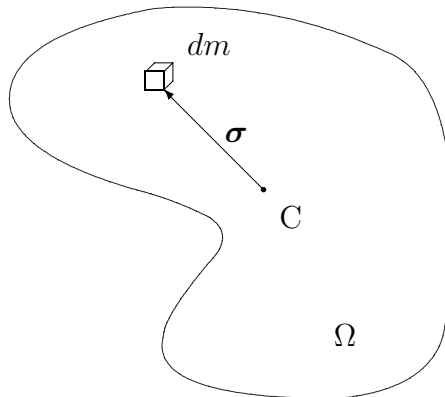


FIG. 3

Calculons le potentiel de la force globale exercée par le corps I sur le corps II séparés par une distance beaucoup plus grande que leurs dimensions respectives. Ce potentiel est la somme des potentiels élémentaires dûs à l'attraction exercée par les masses élémentaires dm_1 sur les masses élémentaires dm_2 (Fig. 4).

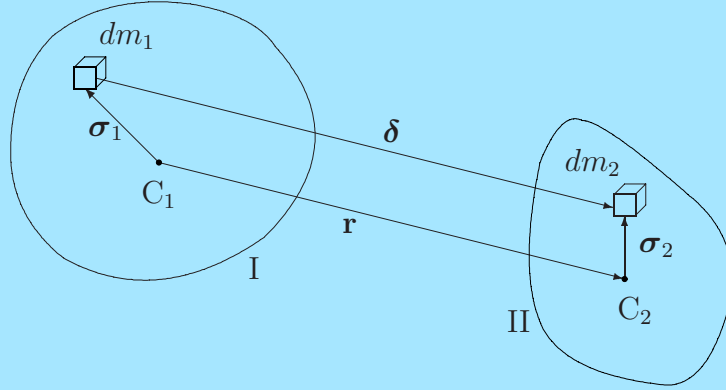


FIG. 4

Le potentiel correspondant à la force exercée par dm_1 sur dm_2 est

$$\begin{aligned}
 dV &= -Gdm_1dm_2\delta^{-1} \\
 &= -Gdm_1dm_2[(-\boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot (-\boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_2)]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{Gdm_1dm_2}{r} \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1)}{r^2} + O\left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1\|}{r}\right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{6}$$

en utilisant (e.g. Delhez, 1999)

$$(1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2)$$

En choisissant pour points de référence les centres d'inertie de I et II et en intégrant sur les volumes Ω_1 et Ω_2 des corps I et II, on obtient, en vertu des équations (4) et (5),

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{GM_1M_2}{r} - O\left(\frac{G}{r^3} \iiint_{\Omega_1} \|\boldsymbol{\sigma}_1\|^2 dm_1 + \frac{G}{r^3} \iiint_{\Omega_2} \|\boldsymbol{\sigma}_2\|^2 dm_2\right) \\
 &\sim -\frac{GM_1M_2}{r}
 \end{aligned} \tag{7}$$

On peut également montrer que la force globale exercée par un objet sphérique homogène (qui constitue très souvent une bonne approximation des corps célestes) sur une masse extérieure à cet objet se ramène à une force de gravitation exercée par une masse ponctuelle (la masse totale de la sphère) située en son centre (qui est aussi le centre d'inertie).

On peut calculer le potentiel de la force globale d'attraction exercée par un objet sphérique homogène, de masse volumique ρ , sur un objet extérieur de masse m en effectuant la somme des contributions dues aux masses élémentaires dM qui constituent cette sphère.

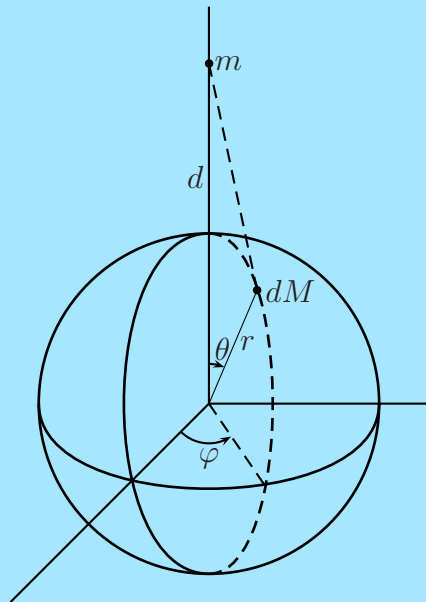


FIG. 5

Le calcul de cette intégrale est facilité par l'utilisation des coordonnées sphériques (Fig. 5). On a alors (e.g. Delhez, 1999)

$$dM = \rho r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (8)$$

et

$$V = -Gm \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2rd \cos \theta}} \rho \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (9)$$

où d est la distance entre l'objet extérieur et le centre d'inertie de la sphère. On obtient

$$V = -\frac{GMm}{d} \quad (10)$$

où M est la masse totale de la sphère.

En général, dans la plupart des problèmes de mécanique céleste, on peut ramener les forces de gravitation à celles qu'exercent des masses ponctuelles, les corps célestes étant de fait quasi-sphériques et par ailleurs séparés par des distances beaucoup plus grandes que leurs dimensions. Dans le cas du mouvement des satellites artificiels au voisinage de la Terre, la non-sphéricité parfaite de celle-ci peut produire des perturbations. Cependant, l'approximation qui consiste à étudier le mouvement en supposant la Terre parfaitement sphérique est tout à fait raisonnable en première approche, tant du point de vue qualitatif que quantitatif.

3 La force de Pesanteur.

Lorsqu'on étudie le déplacement d'une masse m au voisinage d'un point de la Terre, on peut considérer qu'elle est soumise à une force attractive dirigée vers le centre de la Terre et égale à

$$\mathbf{F} = -GMm(R + \delta)^{-2}\mathbf{e}_v \quad (11)$$

où M est la masse de la Terre, R le rayon de la Terre, δ l'altitude du mobile et \mathbf{e}_v le vecteur unitaire selon la verticale du lieu (Fig. 6).

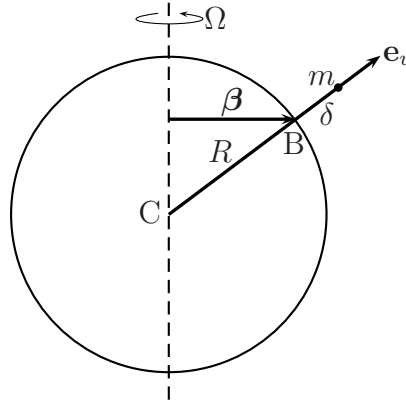


FIG. 6

Tenant compte de ce que $\delta \ll R$ pour des mouvements au voisinage de la Terre, on peut écrire

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{(R + \delta)^2}\mathbf{e}_v \sim m\boldsymbol{\gamma} \quad (12)$$

où

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{GM}{R^2}\mathbf{e}_v \quad (13)$$

désigne l'accélération de la pesanteur. Avec les valeurs typiques en unités MKS, $M = 5,98 \cdot 10^{24}$, $R = 6,37 \cdot 10^6$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$, on peut évaluer que $\gamma = 9,83 \text{ m/s}^2$.

L'accélération de la pesanteur γ définie ici est évidemment l'*accélération absolue* de la pesanteur, c'est-à-dire par rapport à des axes de référence fixes. En pratique, lorsque l'on observe la chute d'un corps, on mesure l'*accélération apparente de la pesanteur*, \mathbf{g} , rapportée à des axes liés en un point B de la Terre. Les mouvements de la Terre (principalement la rotation autour de son axe) impliquent que des axes liés à la Terre ne sont pas *stricto sensu* inertiels et que donc \mathbf{g} n'est pas égal à γ . On peut montrer que la différence se ramène essentiellement à une accélération d'entraînement centrifuge

$$\mathbf{g} = \gamma + \Omega^2 \boldsymbol{\beta} \quad (14)$$

où Ω est la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe et $\boldsymbol{\beta}$ le vecteur position du point B par rapport à l'axe de rotation (Fig. 6).

Considérons un point matériel S évoluant au voisinage de la surface terrestre et désignons par \mathbf{s} son vecteur position par rapport au centre de la Terre C et par \mathbf{r} son vecteur position par rapport à un point B de la surface (Fig. 7). Un système d'axes de directions constantes par rapport à la Terre centré au point C peut être considéré comme inertiel si on néglige la rotation de la Terre autour du Soleil.

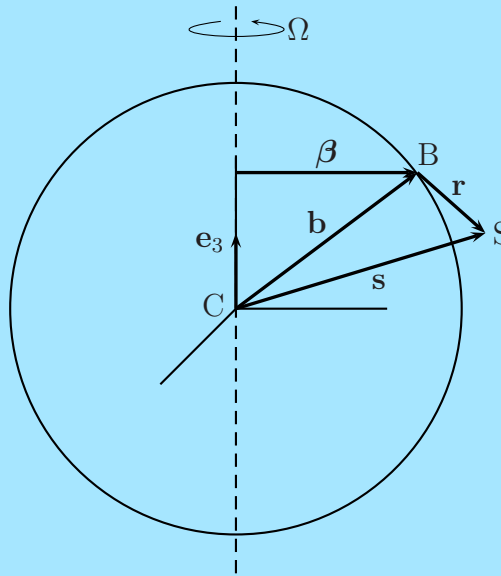


FIG. 7

Nous considérons en B un système d'axes lié à la Terre. Le vecteur de Poisson de ces axes est

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3 \quad (15)$$

où la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe est donnée par

$$\Omega \sim \frac{2\pi}{24 \times 3600} \sim 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Cette vitesse angulaire Ω étant généralement petite par rapport aux fréquences caractéristiques des processus mécaniques étudiés, on peut négliger les variations de Ω ainsi que les termes en Ω^2 vis-à-vis des termes en Ω .

Le point matériel se déplace dans le champ de pesanteur et est donc soumis à la force de pesanteur $m\boldsymbol{\gamma}$, ainsi que, éventuellement, à d'autres forces de résultante \mathbf{G} . La loi fondamentale de Newton s'écrit donc, dans les axes liés à la Terre centrés en B, (e.g. Delhez et Nihoul, 1996),

$$m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} + m\boldsymbol{\gamma} - m [\ddot{\mathbf{b}} + \Omega^2 \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r})] - 2m\Omega \mathbf{e}_3 \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \quad (16)$$

où l'accélération de B, lié à la Terre, est donnée par

$$\ddot{\mathbf{b}} = \Omega^2 \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{b}) \quad (17)$$

Partant de ces expressions, on définit l'accélération apparente de la pesanteur \mathbf{g} telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \boldsymbol{\gamma} - \ddot{\mathbf{b}} - \Omega^2 \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\gamma} - \Omega^2 \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{s}) \\ &\sim \boldsymbol{\gamma} - \Omega^2 \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{b}) \\ &\sim \boldsymbol{\gamma} + \Omega^2 \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (18)$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur position de B par rapport à l'axe de rotation de la Terre.

En effet, en vertu des hypothèses de départ, le terme proportionnel à Ω^2 et $\|\mathbf{r}\|$ est négligeable vis-à-vis des autres termes. Par contre, on ne peut faire le même raisonnement pour le terme proportionnel à Ω^2 et $\|\mathbf{b}\|$ puisque le rayon de la Terre est beaucoup plus grand que toutes les autres longueurs caractéristiques pour un mouvement au voisinage de la Terre.

Avec cette définition, la loi fondamentale de Newton pour un point matériel se déplaçant au voisinage de la Terre s'écrit simplement

$$m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + 2m\Omega \mathbf{e}_3 \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \mathbf{G} + m\mathbf{g} \quad (19)$$

où les dérivées sont relatives à un système d'axes lié à la Terre.

L'accélération apparente de la pesanteur \mathbf{g} est donc l'accélération relative prise par un point matériel initialement au repos par rapport à un observateur lié à la Terre si la force de pesanteur est la seule force agissant sur ce point matériel. L'accélération vraie de la pesanteur γ est l'accélération absolue prise par un point matériel sous l'effet de la pesanteur en l'absence d'autres forces.

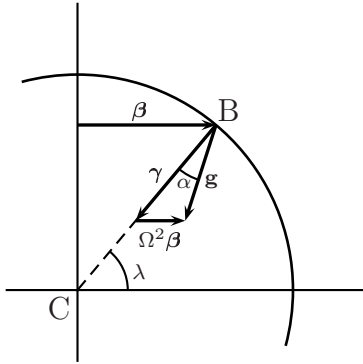


FIG. 8

Si l'accélération vraie est toujours dirigée vers le centre de la Terre et peut être considérée constante en bonne approximation au voisinage de la surface de la Terre, il n'en va pas de même de l'accélération apparente. Ainsi, l'amplitude de \mathbf{g} varie avec la latitude et sa direction dévie de la verticale réelle de quelques minutes d'arc (Fig. 8).

Considérant la Terre comme parfaitement sphérique, on peut estimer aisément ces variations en fonction de la latitude λ . Notant α l'écart par rapport à la verticale, on a, d'après la Fig. 8,

$$\frac{g}{\sin \lambda} = \frac{\Omega^2 R \cos \lambda}{\sin \alpha} = \frac{\gamma}{\sin(\alpha + \lambda)} \quad (20)$$

où R est le rayon de la Terre. Les résultats sont représentés à la figure Fig. 9.

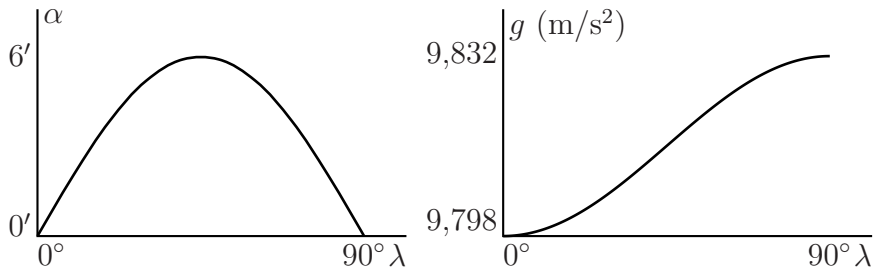


FIG. 9

Ce n'est qu'aux pôles que $\mathbf{g} = \gamma$. À l'équateur, \mathbf{g} est parallèle à γ mais présente la plus grande différence en norme, ce qui est logique puisque c'est là que l'accélération centrifuge est maximale. Les variations représentées à la Fig. 9 étant faibles, on peut considérer \mathbf{g} constant dans un domaine restreint de la surface terrestre.

4 La force centrale de gravitation.

Dans de nombreux cas, les forces de gravitation peuvent se représenter comme des forces d'attraction mutuelle exercées par des masses ponctuelles (aux centres d'inertie des corps).

Lorsqu'un des corps en présence a une masse beaucoup plus grande que les autres, sa position n'est guère perturbée par les objets de petite taille gravitant autour de lui et on peut ramener le problème à un mouvement de masses ponctuelles soumises de la part d'un point fixe (ou de mouvement connu par ailleurs) à une *force centrale* (*e.g.* Delhez et Nihoul, 1996) c'est-à-dire une force dirigée vers le centre d'inertie de l'objet de grande masse et qui est, dans le cas de la gravitation universelle, inversement proportionnelle au carré de la distance de la masse mobile à ce *centre de force*.

De façon générale, on peut montrer que l'on peut ramener l'étude du mouvement relatif de deux corps de masses m_1 et m_2 à celui du mouvement d'un point matériel dont la masse, appelée *masse réduite*, est donnée par

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (21)$$

et qui est soumis à une force d'attraction universelle de la part d'un point fixe (ou en translation à vitesse constante).

Si les masses m_1 et m_2 ne sont soumises qu'aux forces qu'elles exercent respectivement l'une sur l'autre (les autres forces étant négligeables), leur centre d'inertie est animé d'un mouvement de translation à vitesse constante par rapport à tout trièdre inertiel. On peut, par conséquent, prendre leur centre d'inertie comme origine d'un trièdre inertiel. Soient σ_1 et σ_2 les vecteurs positions des points de masses m_1 et m_2 par rapport à leur centre d'inertie. De la définition du centre d'inertie et de la loi de Newton appliquée à chacune des masses, il vient, en toute généralité,

$$m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$m_1 \ddot{\sigma}_1 = (\sigma_2 - \sigma_1) \psi(r) \quad (23)$$

$$m_2 \ddot{\sigma}_2 = -(\sigma_2 - \sigma_1) \psi(r) \quad (24)$$

où $\psi(r)$ est une fonction de $r = \|\sigma_2 - \sigma_1\|$. Posant

$$\mathbf{r} = \sigma_2 - \sigma_1 \quad ; \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

et combinant ces équations, on obtient

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \psi(r) \quad (25)$$

5 Mouvement dans le champ de l'attraction universelle.

Étudions le mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale attractive inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de force. Les conclusions que nous allons établir à partir de ce modèle seront applicables aux mouvements des planètes autour du Soleil, le Soleil étant pris comme centre de force et la planète représentée par le point matériel en mouvement, mais aussi aux mouvements des satellites autour de la Terre, la Terre constituant cette fois le centre de force et le satellite le point matériel. Remarquons que, dans les deux cas, la masse satellisée est toujours négligeable vis-à-vis de celle du corps principal et qu'il est donc licite de considérer celui-ci comme centre de force, sans devoir faire appel à la notion de masse réduite.

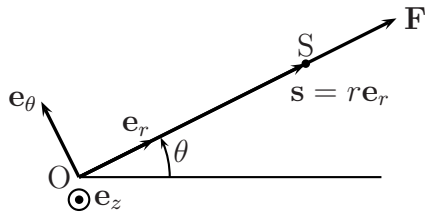


FIG. 10

Soit donc un point matériel S, de masse m soumis à la seule force centrale \mathbf{F} dont la direction passe constamment par le centre de force fixe O (Fig. 10). Si $\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r$ est le vecteur position de S par rapport à des axes fixes d'origine O, la loi de Newton s'écrit, (*e.g.* Delhez et Nihoul, 1996),

$$m \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} = -m\mu r^{-2} \mathbf{e}_r \quad (26)$$

où $\ddot{\mathbf{s}}$ désigne la dérivée seconde de \mathbf{s} par rapport au temps, c'est-à-dire l'accélération (un point surmontant une variable désigne la dérivée temporelle de celle-ci). On montre aisément que le mouvement décrit par une telle équation est plan.

Multipliant vectoriellement les deux membres de (26) par \mathbf{s} et tenant compte de ce que le vecteur \mathbf{F} est parallèle à \mathbf{s} , on obtient

$$\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0} \quad (27)$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h} \quad (28)$$

où \mathbf{h} est un vecteur constant qui représente le moment cinétique par unité de masse du point S. Cette intégrale première indique également que les vecteurs position et vitesse sont constamment contenus dans un plan fixe perpendiculaire à \mathbf{h} . Le mouvement est donc plan. La normale à ce plan est donnée par les conditions initiales du mouvement. Si \mathbf{s}_0 et \mathbf{v}_0 sont respectivement les vecteurs position et vitesse initiales du point S, on a

$$\mathbf{h} = \mathbf{s}_0 \wedge \mathbf{v}_0 \quad (29)$$

Il est alors intéressant d'utiliser les coordonnées polaires (*e.g.* Delhez, 1999) dans le plan du mouvement (Fig. 10). Dans ce système de coordonnées, la vitesse du mobile est la composition d'un mouvement radial à la vitesse \dot{r} et d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de sorte que, (*e.g.* Delhez et Nihoul, 1996),

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (30)$$

L'équation de Newton (26) fournit alors deux *intégrales premières scalaires* qui vont permettre la description du mouvement.

i. Conservation du moment cinétique :

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (31)$$

où h est une constante dépendant des conditions initiales du problème et représentant la norme du moment cinétique par unité de masse.

ii. Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + h^2r^{-2}) - \mu r^{-1} = e \quad (32)$$

où e est une constante déterminée par les conditions initiales et représentant l'énergie totale (énergie cinétique + énergie potentielle) par unité de masse.

En coordonnées polaires, l'équation (26) conduit aux deux équations scalaires

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\mu\mu r^{-2} \quad (33)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (34)$$

L'équation (34) fournit immédiatement une intégrale première scalaire. Cette intégrale première, cependant, n'est rien d'autre que la projection sur un axe \mathbf{e}_z , perpendiculaire au plan du mouvement, de l'intégrale première vectorielle de conservation du moment cinétique. En effet, en coordonnées polaires,

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = r\mathbf{e}_r \wedge (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z \quad (35)$$

de sorte que

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (31)$$

On peut éliminer $\dot{\theta}$ entre les deux composantes de l'équation de Newton (33) et (34) pour obtenir une expression qui ne dépend plus que de r . Après simplification par m , il vient

$$\ddot{r} - h^2r^{-3} = -\mu r^{-2} \quad (36)$$

Dans ces conditions, multipliant les deux membres de cette équation par \dot{r} , on a

$$\dot{r}\ddot{r} - h^2 r^{-3} \dot{r} + \mu r^{-2} \dot{r} = 0 \quad (37)$$

Chacun des termes de cette équation est une différentielle totale exacte. En effet,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) = \dot{r}\ddot{r} \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} h^2 r^{-2} \right) = -h^2 r^{-3} \dot{r} \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} (-\mu r^{-1}) = \mu r^{-2} \dot{r} \quad (40)$$

Par intégration, on obtient alors

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}) - \mu r^{-1} = e \quad (32)$$

où e est une constante déterminée par les conditions initiales, soit

$$e = \frac{1}{2} v_0^2 - \mu r_0^{-1} \quad (41)$$

Il est clair que

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + h^2 r^{-2}), \quad -\mu r^{-1} \quad \text{et} \quad e$$

représentent respectivement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale, par unité de masse. L'équation (32) traduit par conséquent la conservation de l'énergie dans le repère de centre O.

L'équation de conservation de l'énergie (32) peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} h^2 r^{-2} - \mu r^{-1}}_{\tilde{\mathcal{V}}(r)} = e \quad (42)$$

On peut dès lors discuter les différents types de mouvements possibles selon les valeurs de e à partir du graphe de $\tilde{\mathcal{V}}(r)$ (Fig. 11).

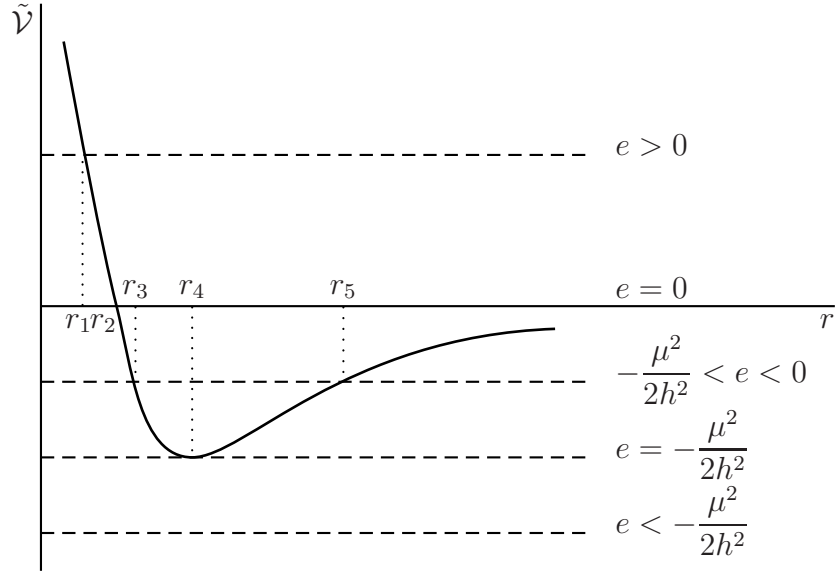


FIG. 11

L'allure du graphe se justifie aisément puisque

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{V}}(r) = 0^- \quad (43)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{V}}(r) = +\infty \quad (h \neq 0) \quad (44)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_2 = \frac{h^2}{2\mu} \quad (45)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}(r) = -\frac{\mu^2}{2h^2}, \quad \tilde{\mathcal{V}}'(r) = 0, \quad \tilde{\mathcal{V}}''(r) > 0 \quad \text{pour} \quad r = r_4 = \frac{h^2}{\mu} \quad (46)$$

Dans toute région du graphe où $e < \tilde{\mathcal{V}}$, l'équation de conservation de l'énergie fournit deux valeurs imaginaires de la vitesse radiale

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(e - \tilde{\mathcal{V}}(r))} \quad (47)$$

ce qui indique que le mouvement n'est pas possible. Les régions où $e < \tilde{\mathcal{V}}$ sont donc inaccessibles. Les seules régions accessibles sont celles où $e \geq \tilde{\mathcal{V}}$. Les points tels que $e = \tilde{\mathcal{V}}$ où la vitesse radiale s'annule sont les points de réflexion.

Lorsque $e < -\frac{1}{2}\mu^2 h^{-2}$, il n'y a donc pas de solution au problème.

Distinguons trois cas :

i. $e = -\frac{\mu^2}{2h^2}$

Dans ce cas, la seule solution possible au problème est

$$\dot{r} = 0 \quad ; \quad r = r_4 \quad ; \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r_4^2} \quad (48)$$

La trajectoire circulaire (de rayon r_4) est parcourue à vitesse constante.

ii. $-\frac{\mu^2}{2h^2} < e < 0$

r est toujours compris entre deux valeurs r_3 et r_5 . La trajectoire est donc comprise entre les deux cercles correspondants et le mouvement est borné. Rien par contre ne permet d'affirmer que la trajectoire est fermée. Bien que le mobile repasse périodiquement par les mêmes valeurs de r , on ne peut affirmer que ceci se produit pour des valeurs identiques de θ . Le corps est satellisé.

iii. $e \geq 0$

Dans ce cas, r peut croître indéfiniment. Il existe une valeur minimale r_1 (ou r_2 si $e = 0$) de r mais pas de valeur maximale. C'est le seul point de réflexion sur le graphe. La trajectoire est ouverte.

Les résultats obtenus par la discussion sur le graphe de $\tilde{\mathcal{V}}$ peuvent être précisés en déterminant l'équation de la trajectoire du point matériel. L'étude complète des différentes trajectoires correspondant aux différents comportements détectés sur le graphe de $\tilde{\mathcal{V}}$ montre que toutes les trajectoires sont des coniques : cercles et ellipses pour les états satellisés, paraboles et hyperboles pour les mouvements non bornés.

L'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires, est la relation $r = r(\theta)$. Il est possible d'obtenir une équation différentielle de la trajectoire à partir de l'équation du second ordre (36). Il est, dans ce cas précis de force en r^{-2} , avantageux de travailler avec la variable

$$u = r^{-1} \quad (49)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= hu^2 \\ \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = -u^{-2} \frac{du}{dt} = -u^{-2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{du}{d\theta} \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (50)$$

En substituant ces expressions dans (36), il vient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (51)$$

dont la solution générale est (e.g. Delhez, 1999)

$$u = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{1}{p} \quad (52)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration et où on a posé

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (53)$$

La discussion du diagramme de potentiel montre que, si $h \neq 0$, il y a au moins un point de réflexion. Celui-ci constituant un point particulier de la trajectoire, nous choisirons de prendre l'origine des θ en ce point pour décrire la trajectoire. Dans le cas où il existe deux points de réflexion, nous choisirons celui qui correspond à la valeur minimale de r . La valeur u_0 de u correspondante est donc toujours la plus grande racine de

$$\tilde{\mathcal{V}} - e = 0 \quad \text{soit} \quad h^2 u^2 - 2\mu u - 2e = 0 \quad (54)$$

c'est-à-dire

$$u_0 = \frac{1 + \epsilon}{p} \quad \text{où} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{\mu^2}} \quad (55)$$

En ce point, $\theta = 0$, mais aussi

$$\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = 0 \quad (56)$$

de sorte que la trajectoire s'écrit

$$u = \frac{1}{p} (\epsilon \cos \theta + 1) \quad (57)$$

soit

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (58)$$

C'est l'équation d'une conique dont l'origine est un des foyers, dont le demi-paramètre est p et dont l'excentricité est ϵ .

On distingue quatre cas :

i. $e = -\frac{\mu^2}{2h^2}$ et donc $\epsilon = 0$

La trajectoire est une circonférence centrée à l'origine.

ii. $-\frac{\mu^2}{2h^2} < e < 0$ et donc $0 < \epsilon < 1$

La trajectoire est une ellipse admettant l'axe $\theta = 0$ comme grand axe et dont le foyer de droite est le centre de force (Fig. 12).

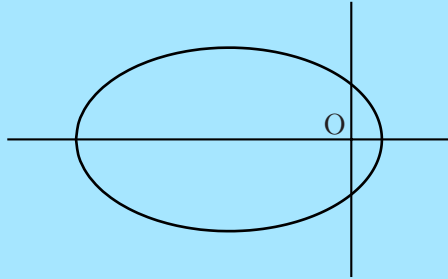


FIG. 12

iii. $e = 0$ et donc $\epsilon = 1$

La trajectoire est une parabole tournant sa concavité vers le centre de force (Fig. 13).

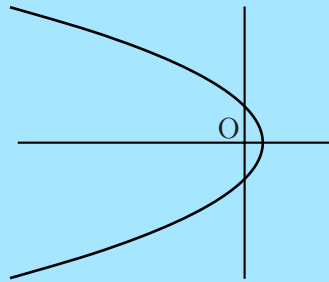


FIG. 13

iv. $e > 0$ et donc $\epsilon > 1$

La trajectoire est une branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le centre de force pris comme origine des coordonnées (Fig. 14).

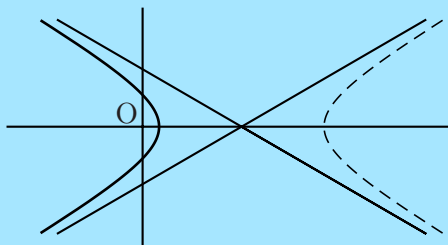


FIG. 14

Ces résultats concordent avec les indications retirées précédemment de l'étude de l'intégrale première de conservation de l'énergie.

6 Lois de Kepler sur le mouvement des planètes.

Grâce aux observations précises de Tycho Brahe dont il fut l'assistant, Johannes Kepler (1571–1630) découvrit successivement les lois qui portent son nom et décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil :

- i. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers (1609) (Fig. 15).

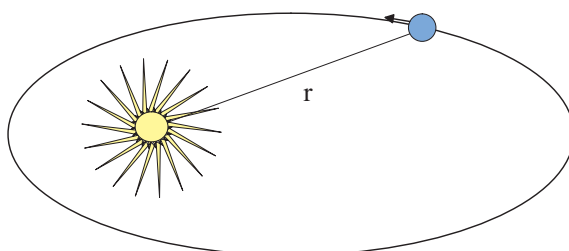


FIG. 15

- ii. Le rayon vecteur joignant le Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux au cours de son mouvement autour du Soleil (*Loi des aires*, 1609) (Fig. 16).

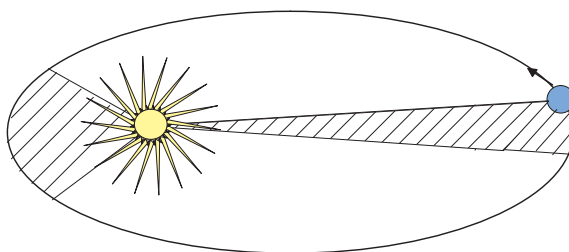


FIG. 16

- iii. Les carrés des périodes des mouvements planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des trajectoires (1619).

Ces lois peuvent se démontrer facilement à partir de l'étude qui précède en considérant que le Soleil est le centre de force et que la planète est représentée par le point matériel.

- i. D'abord, les trajectoires de corps satellisés correspondent au cas $e < 0$ pour lequel les trajectoires sont circulaires ou elliptiques.

- ii. Ensuite, la deuxième loi est une simple conséquence de la constance du moment cinétique. En effet, la surface balayée par unité de temps par le rayon vecteur joignant le Soleil à une planète, encore appelée *vitesse aréolaire*, se calcule suivant

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}\| = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h \quad (59)$$

où Σ désigne l'aire de la surface balayée par le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète (Fig. 17). Ainsi, la vitesse est nécessairement maximale au point de l'orbite le plus proche du soleil, la *périhélie*, et minimale au point le plus éloigné, l'*aphélie*.

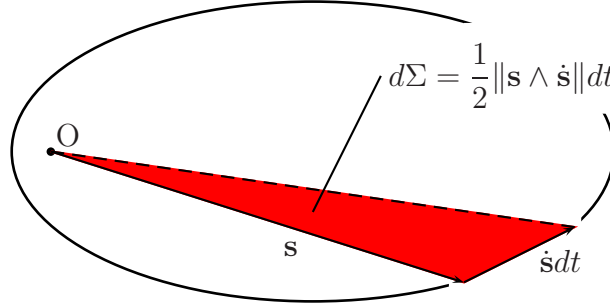


FIG. 17

- iii. Démontrons, dans un premier temps, la troisième loi dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R . La conservation de la vitesse aréolaire donne

$$h = R^2 \dot{\theta} = R^2 \frac{2\pi}{T} \quad (60)$$

où T est la période. Or, pour une trajectoire circulaire, on a, d'après l'équation (46),

$$R = \frac{h^2}{\mu} \quad (61)$$

Combinant ces relations, on obtient

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\mu} \quad (62)$$

Il est possible de généraliser ce résultat aux trajectoires elliptiques.

Exprimons de deux manières l'aire de l'ellipse (Fig. 18) décrite par la trajectoire

$$\Sigma = \pi ab = \int_0^T \frac{d\Sigma}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^T h dt = \frac{hT}{2} \quad (63)$$

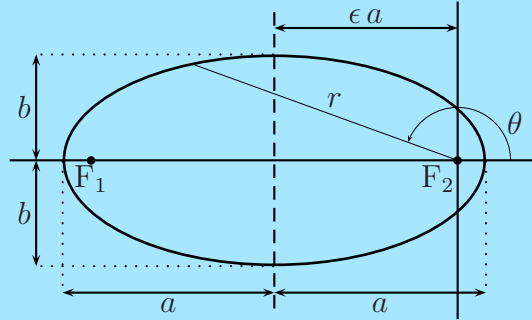


FIG. 18

Puisque, en coordonnées polaires,

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\ p = \frac{b^2}{a} \end{cases} \quad (64)$$

les demi-axes a et b sont donnés par

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} \right] \\ b &= a \sqrt{1 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (65)$$

c'est-à-dire, utilisant (53) et (55),

$$a = -\frac{\mu}{2e} \quad (66)$$

$$b = \sqrt{\frac{a}{\mu}} h \quad (67)$$

Substituant dans (63), on obtient

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad (68)$$

Ces lois sont aussi d'application pour le mouvement des satellites, naturels ou artificiels, autour d'une planète si l'influence des autres planètes sur le mouvement du satellite peut être négligée.

On peut donner quelques exemples d'applications directes :

i. Récupération d'un satellite artificiel.

La deuxième loi de Kepler nous apprend que la vitesse angulaire d'un satellite est maximale au point de l'orbite le plus proche de la terre et qu'il y est donc difficile d'intercepter le satellite en cet endroit a priori intéressant.

ii. Vitesse d'échappement.

On appelle *vitesse d'échappement* la vitesse nécessaire à un objet pour échapper à l'attraction terrestre. Si on se reporte à la Fig. 11, on constate que l'énergie minimale qu'un mobile doit posséder pour avoir un mouvement non borné (s'éloigner indéfiniment de la Terre) est $e = 0$. Plaçons nous dans le cas d'un objet lancé de la surface terrestre. Si on tient compte de

$$v^2 = \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + h^2r^{-2}$$

l'équation (32) donne

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} \quad (69)$$

où v_e est la vitesse d'échappement, R est le rayon de la Terre et où $\mu = GM$, avec M la masse de la Terre. Utilisant les valeurs numériques moyennes données plus haut, on obtient $v_e = 11,2$ km/s.

iii. Vitesse sur une orbite circulaire.

La vitesse v_o d'un satellite artificiel sur une orbite circulaire de rayon R_o est donnée, en vertu de la troisième loi de Kepler, par

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_o} = \frac{2\pi R_o}{v_o} = 2\pi \sqrt{\frac{R_o^3}{\mu}} \quad (70)$$

c'est-à-dire

$$v_o = \sqrt{\frac{\mu}{R_o}} = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} \quad (71)$$

Cette vitesse dépend donc évidemment de l'altitude $R_o - R$ de l'orbite.

7 Trajectoires spatiales.

7.1 Définition d'une orbite et terminologie.

Le *périgée* est le point de l'orbite le plus proche de la Terre. Le point le plus distant pour une orbite elliptique est appelé *apogée*. La ligne joignant le périgée et l'apogée, qui n'est autre que le grand axe de l'ellipse, s'appelle la *ligne des apsides*.

Une orbite est aussi définie par son orientation dans l'espace (Fig. 20), donnée par son *inclinaison* i par rapport au plan de l'équateur. L'intersection entre le plan de l'orbite et le plan de l'équateur est la *ligne des noeuds*. On parle de *noeud ascendant* quand le satellite passe du sud au nord et de *noeud descendant* quand il passe du nord au sud.

Il faut encore définir la position du noeud ascendant, par exemple par l'*ascension droite* $\tilde{\Omega}$ du noeud ascendant (Fig. 20). C'est l'angle entre la droite vernale et le noeud ascendant dans le plan de l'équateur, mesuré vers l'est. La *droite vernale*, ou *ligne des équinoxes*, est l'intersection entre le plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil (appelé plan de l'écliptique) et le plan de l'équateur (Fig. 19). Ainsi, le plan de l'orbite est défini.

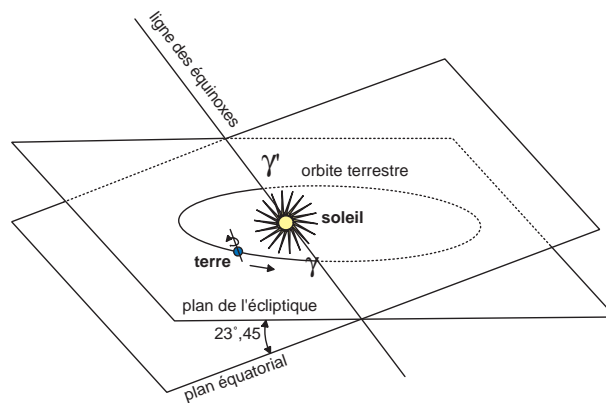


FIG. 19 - Définition de la ligne des équinoxes (ou droite vernale).

Il faut ensuite préciser l'orientation de l'orbite dans son plan. Celle-ci est donnée par l'*argument du périégée* ω , angle mesuré au centre de la Terre, dans le plan de l'orbite, du noeud ascendant vers le périégée (Fig. 20). Finalement, il reste à préciser où le satellite se trouve sur son orbite. Cette position est donnée par l'*anomalie vraie* ν , angle mesuré au centre de la Terre entre la direction du périégée et celle du satellite.

En résumé, les éléments d'une orbite sont les paramètres qui permettent de spécifier le mouvement d'un satellite. Pour une date donnée, ces éléments sont :

- i. La forme de l'orbite, donnée par le demi-grand axe a et l'excentricité ϵ ,
- ii. La position du plan de l'orbite, donnée par l'inclinaison i et l'ascension droite du noeud ascendant $\tilde{\Omega}$,
- iii. La position de l'orbite dans son plan, donnée par l'argument du périégée ω ,
- iv. La position du satellite sur son orbite, donnée par l'anomalie vraie ν .

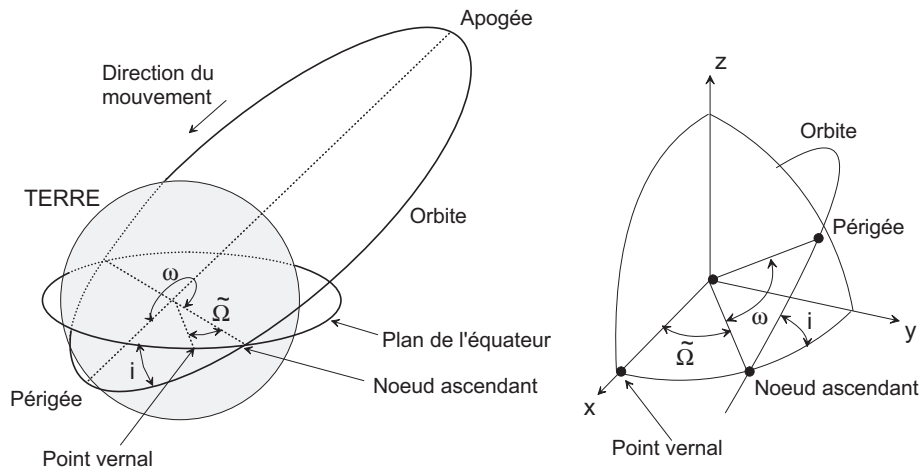


FIG. 20 - Paramètres définissant l'orbite d'un satellite.

7.2 Orbites des véhicules spatiaux.

Une orbite de satellite est appelée *prograde* si son inclinaison est inférieure à 90° et *rétrograde* si cette inclinaison est supérieure à 90° (Fig. 21). L'inclinaison d'une orbite *polaire* est de 90° exactement. La plupart des satellites sont lancés en direction de l'est et, si possible, depuis l'équateur pour profiter de la vitesse de rotation de la Terre. En effet, la vitesse v_T en un point de la surface terrestre s'écrit

$$v_T = \Omega d = \Omega R \cos \lambda \quad (72)$$

où d est la distance à l'axe de la Terre, R le rayon terrestre et λ la latitude. Cette vitesse est donc maximale à l'équateur et vaut $v_T = 6,37 \cdot 10^6 \times 0,73 \cdot 10^{-4} = 465 \text{ m/s}$.

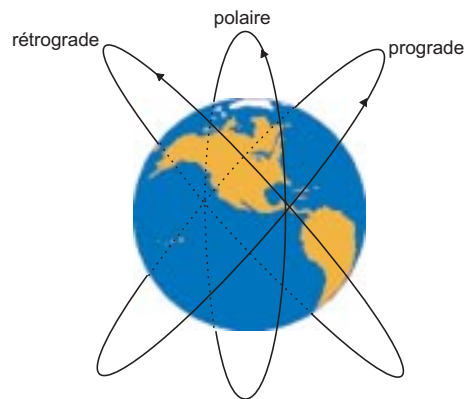


FIG. 21 - Orbites prograde, rétrograde et polaire

L'application des formules, par exemple l'équation (70), montre qu'à une altitude d'environ 35800 km, la période orbitale égale la *période sidérale* de 23h 56m 4s, c'est-à-dire le temps d'une rotation complète de la Terre autour de son axe. Les satellites à cette altitude, sur une orbite d'inclinaison nulle, c'est-à-dire au dessus de l'équateur, sont dits *géostationnaires*. Leur position par rapport à la Terre ne varie pas. Un satellite à la même altitude mais sur une orbite inclinée est dit *géosynchrone*. Vu du sol, il décrit un "8" sur le fond du ciel.

L'orbite géostationnaire est l'orbite de choix pour la plupart des satellites de télécommunication. Plus de 200 satellites sont en permanence opérationnels sur cette orbite. Chaque satellite dispose d'une portion d'orbite de, typiquement, 0.5 arcdeg. Quand le satellite cesse d'être actif, il faut libérer la place et le faire quitter sa position de travail en actionnant ses moteurs.

7.3 Manœuvres orbitales.

7.3.1 Manœuvres de transfert entre orbites.

Le demi-grand axe a de l'orbite dépend uniquement de l'énergie e du véhicule (66). Dès lors, la méthode pour changer le grand axe est de modifier brutalement l'énergie du véhicule, c'est-à-dire d'actionner le moteur dans la direction du vol (dans le même sens ou le sens inverse). L'orbite résultante sera tangente à l'orbite initiale à l'endroit où le moteur a fonctionné. Pour faire passer un véhicule d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire avec une faible dépense d'énergie, on suivra une orbite de transfert elliptique tangente en son apogée à l'orbite circulaire de plus grand rayon et, en son périogée, à l'orbite circulaire de petit rayon (*e.g.* Rochus, 1999). Cette orbite est appelée *ellipse de transfert de Hohmann* (Fig. 22).

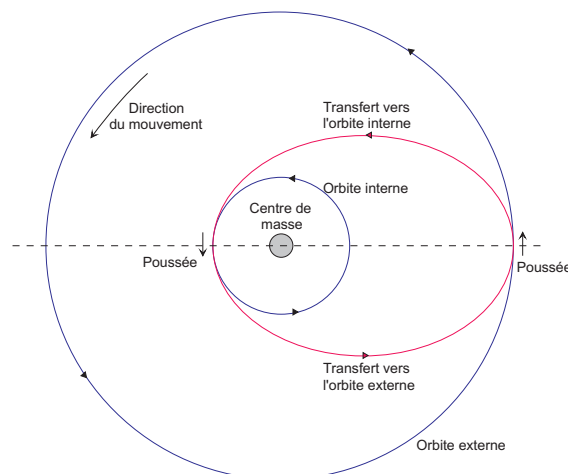


FIG. 22 - Orbite de transfert de Hohmann.

L'orbite de Hohmann qui permet de passer d'une orbite de basse altitude LEO, à l'orbite géostationnaire GEO, est appelée orbite de *transfert* GTO. Lorsque l'on utilise cette orbite de transfert de Hohmann, les manœuvres doivent être effectuées quand le véhicule se trouve à 180° de l'endroit à atteindre en fin de transfert. On peut facilement calculer le temps t_H nécessaire pour parcourir la demi-orbite de transfert d'une orbite basse vers l'orbite géostationnaire. Les orbites basses sont situées à des altitudes allant de 200 à 1000 km. Considérons, par exemple, une orbite située à 400 km de la Terre. Le temps t_H nécessaire pour atteindre l'orbite géostationnaire est donné par la troisième loi de Kepler :

$$t_H = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{MG}} \quad (73)$$

où $2a$ est la somme des distances du centre de la Terre aux orbites basse et géostationnaire soit

$$2a = 400 \cdot 10^3 + 35800 \cdot 10^3 + (2 \times 6370 \cdot 10^3) = 48,94 \cdot 10^6 \text{ m}$$

ce qui donne $t_H \sim 5\text{h}30'$.

On peut également obtenir une première approximation du temps de transfert d'une sonde spatiale de la Terre vers Mars en considérant que celui-ci s'effectue le long d'une orbite de Hohmann, c'est-à-dire en ne tenant compte que de l'effet de l'attraction solaire. En réalité, la sonde suit une trajectoire hyperbolique lui permettant de quitter l'attraction terrestre. Ensuite, pendant la plus grande partie du transfert, la sonde suit une trajectoire elliptique autour du soleil. Enfin, l'approche immédiate de Mars s'effectue le long d'une hyperbole résultant de l'attraction de la sonde par la seule planète Mars. En négligeant les temps de parcours des orbites hyperboliques, le temps de transfert t_{TM} de la Terre vers Mars se calcule suivant

$$t_{TM} = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{M_S G}} \quad (74)$$

où M_S est la masse du soleil ($=1989 \cdot 10^{27}$ kg) et où $2a$ est la somme des distances moyennes du Soleil aux planètes Terre et Mars soit

$$2a = 149,6 \cdot 10^9 + 228,0 \cdot 10^9 = 377,6 \cdot 10^9 \text{ m}$$

ce qui donne $t_{TM} \sim 259$ jours.

En pratique, pour envoyer une sonde vers Mars, on profite des configurations d'alignement du Soleil, de la Terre et de Mars. On dit alors que les trois planètes sont en *opposition*. C'est ainsi que le voyage vers Mars le plus avantageux du point de vue de l'énergie dépensée doit partir environ 3 mois avant l'opposition pour se terminer environ 5 mois et demi après l'opposition (Fig. 23). Les calculs précis doivent

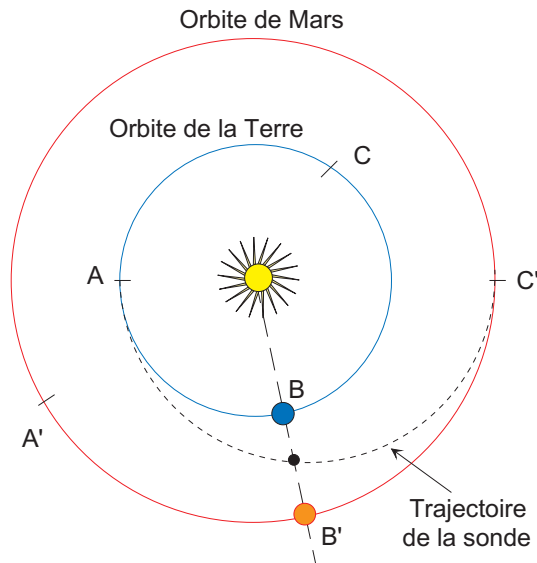


FIG. 23 - Orbite de transfert de la Terre vers Mars. A et A' donnent respectivement les positions de la Terre et de Mars au lancement et C et C' au moment de l'arrivée. La Terre et Mars sont en opposition en B et B'.

prendre en compte les distances exactes aux périodes considérées (tenant compte de ce que les orbites ne sont ni coplanaires ni circulaires) ainsi que l'influence des planètes Mars et Terre sur le mouvement de la sonde. Par exemple, Mars était en opposition le 15/12/1975. Deux sondes Viking (I et II) ont été lancées à cette époque, respectivement les 20/8/1975 et 9/10/1975 avec des arrivées sur Mars les 19/6/1976 et 7/8/1976.

Les configurations d'opposition déterminent les fenêtres de lancement pour les voyages interplanétaires. Les orbites planétaires dans le système solaire sont assez uniformes en forme et orientation. À l'exception de Mercure et Pluton, les inclinaisons sont inférieures à $3,5^\circ$ et les excentricités inférieures à 0,1. L'intervalle entre deux époques successives d'alignement entre le Soleil, la Terre et une planète quelconque est appelé période synodique. Les périodes synodiques sont :

- Mercure : 116 jours
- Vénus : 584 jours
- Mars : 780 jours

Pour les planètes éloignées, les périodes sont proches de 1 an (Jupiter : 399 jours, Saturne : 378 jours, Uranus : 370 jours). Ainsi, c'est parce que la période synodique de Mars est approximativement de 2 ans que les missions vers Mars sont programmées tous les 2 ans.

Notons que la vitesse de la Terre sur son orbite est de l'ordre de 30 km/s. Cette

vitesse représente, pour la sonde interplanétaire, une vitesse initiale indispensable car inaccessible avec les lanceurs actuels.

7.3.2 Manœuvres assistées par la gravité.

Un autre type de manoeuvres est couramment employé. Il s'agit des manoeuvres assistées par la gravité d'une planète : la vitesse orbitale de la planète est utilisée pour modifier l'orbite du véhicule. En fait, le véhicule approche la planète selon une trajectoire hyperbolique et quittera la planète avec la même vitesse (dans les coordonnées liées à la planète) mais dans une autre direction. Il s'agit donc d'une "collision" élastique, qui est utilisée pour conférer une énergie supplémentaire au véhicule dans son mouvement par rapport au Soleil. Par exemple, si le véhicule atteint la planète avec une vitesse de 5 km/s et quitte la planète avec la même vitesse de 5 km/s mais après une rotation du plan de la trajectoire de 90° , la modification de vitesse dans les coordonnées initiales est de $5\sqrt{2}$ km/s soit 7,07 km/s.

Le changement de vitesse accessible est donné par la formule

$$\delta v = 2v_h \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (75)$$

où v_h est la vitesse hyperbolique et θ l'angle de rotation (Fig. 24). La valeur de δv la plus élevée que l'on puisse atteindre est de 11 km/s en utilisant la gravité de Jupiter et un survol à très basse altitude.

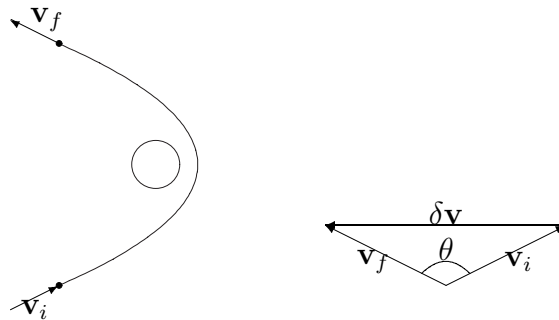


FIG. 24 - Variation du vecteur vitesse lors d'une manœuvre assistée par la gravité.

Cette méthode a été employée plusieurs fois :

- Mariner 10 assisté par Vénus pour atteindre Mercure,
- Pioneer 10 assisté par Jupiter pour atteindre la vitesse de libération solaire,
- Ulysses par Jupiter pour sortir du plan de l'écliptique (Fig. 25).

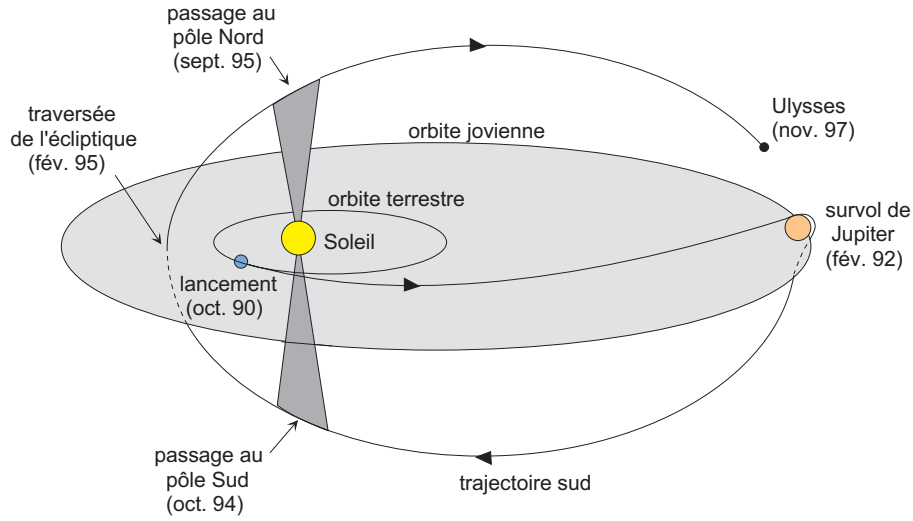


FIG. 25 - Manœuvre effectuée par Ulysses autour de Jupiter.

7.4 Perturbations des orbites.

Si M est la masse de la Terre et m la masse d'un objet dont nous suivons le mouvement, le potentiel de gravité s'écrit

$$V = -\frac{GMm}{r} \quad (3)$$

et la force d'attraction entre les deux corps

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (2)$$

Ce cas idéal est celui d'une Terre de symétrie sphérique, ce qui est le cas approché de la plupart des gros objets astronomiques. En réalité, la Terre est aplatie avec une différence d'une vingtaine de km entre le rayon au pôle et celui à l'équateur. En outre, l'équateur n'est pas un cercle parfait mais présente un "renflement". Dans le cas réel, le potentiel comporte donc une composante qui tient compte des inhomogénéités, c'est-à-dire de la distribution de masse non symétrique. Le potentiel corrigé prend alors la forme

$$V = -\frac{GMm}{r} + B(r, \theta, \varphi) \quad (76)$$

où $B(r, \theta, \varphi)$ est le facteur correctif en coordonnées sphériques (*e.g.* Rochus, 1999). Les orbites réelles ne suivent pas de manière précise les lois de Kepler qui ne fournissent qu'une approximation de l'orbite vraie. Par rapport à cette orbite de référence, le véhicule subit des perturbations de trajectoire qui sont dues à des causes diverses :

- gravitationnelles (aplatissement de la Terre, renflement équatorial, influence de la Lune et du Soleil, marées),
- non gravitationnelles (freinage atmosphérique),
- pression de radiation solaire,
- relativistes.

L'importance relative de ces divers effets dépend de la structure du véhicule spatial, des caractéristiques de l'orbite et du niveau d'activité solaire, c'est ainsi que :

- le freinage atmosphérique domine en-dessous de 100 km et produit un effet notable jusqu'à 1000 km,
- le rapport de l'attraction gravitationnelle de la Lune à celui de la Terre est de 0,02% près de la surface terrestre,
- les effets gravitationnels de l'aplatissement de la Terre et de l'attraction lunaire deviennent égaux vers 8000 km d'altitude,
- les perturbations solaires et lunaires sont négligeables en-dessous de 700 km.

7.4.1 Forces non gravitationnelles.

Pour un satellite en orbite basse, la principale force non gravitationnelle est le *freinage atmosphérique*. Pour une orbite elliptique, cet effet est maximum au périhélie (la densité atmosphérique décroît approximativement exponentiellement avec l'altitude). L'effet est similaire à un freinage par un moteur au périhélie de l'orbite, c'est-à-dire que l'altitude de l'apogée s'en trouve diminuée (Fig. 26). De plus, l'excentricité diminue (l'orbite se circularise). L'altitude du périhélie ainsi que son argument ne varient pas de manière significative. Le noeud ascendant et l'inclinaison ne changent pas. Au cours de

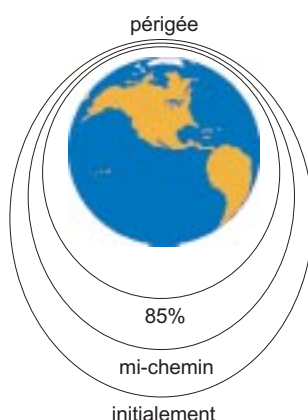


FIG. 26 - Usure de l'orbite par freinage.

la vie du satellite, cet effet augmente et l'usure de l'orbite s'accroît jusqu'à la rentrée dans l'atmosphère.

L'érosion de l'orbite est fonction décroissante du rapport de la masse du satellite à sa section mesurée perpendiculairement au vecteur vitesse. L'ordonnée de la Fig. 27 présente le nombre de révolutions N correspondant à la durée de vie du satellite divisée par le coefficient balistique

$$\frac{m}{C_D A} \quad (77)$$

où m est la masse du satellite (kg), A est la section (m^2), et C_D est un coefficient de freinage compris entre 1 et 2, fonction de la forme du satellite.

Les différentes courbes de la Fig. 27 correspondent à des trajectoires elliptiques d'excentricités différentes. Par exemple, un satellite ayant un coefficient balistique de 80 kg/m^2 , sur une orbite circulaire de 500 km possède une valeur $N/80$ égale à 140 ce qui donne une durée de vie de $80 \times 140 = 11000$ révolutions.

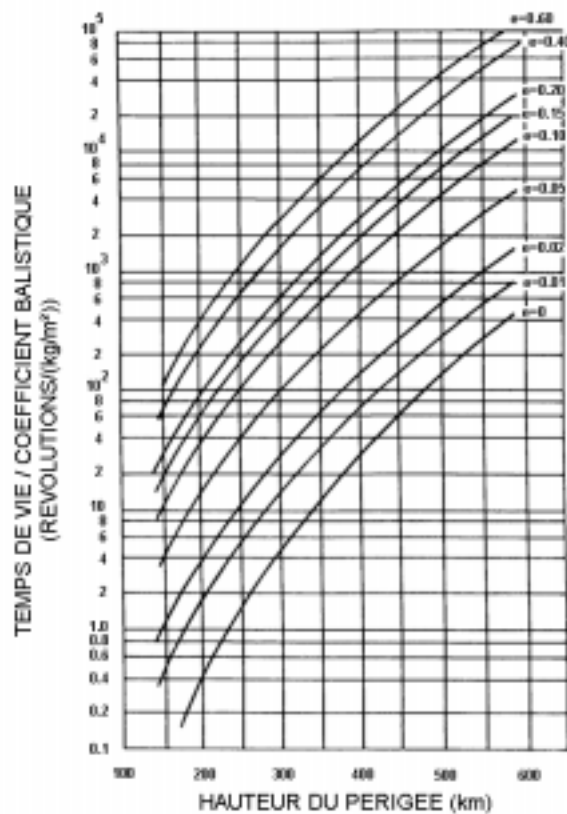


FIG. 27 - Durée de vie d'un satellite de la Terre en période d'activité solaire moyenne.

L'utilisation du graphique ne tient pas compte des variations de densité de l'atmosphère dues à l'activité solaire qui conduisent à des différences pouvant aller jusqu'à 50%.

Un autre effet non gravitationnel est la pression de radiation solaire qui peut être importante pour les satellites ayant de grands panneaux solaires. C'est cette force qui sera utilisée dans le futur par les voiliers solaires.

7.4.2 Distribution de masse non sphérique.

Pour les satellites en orbite basse, la cause gravitationnelle principale de perturbation est la distribution de masse non sphérique de la Terre. L'aplatissement aux pôles a pour effet principal une rotation de la ligne des noeuds décrite (en degrés par jour) par l'équation

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dt} = -10 \left(\frac{R}{a}\right)^{3.5} (1 - \epsilon^2)^{-2} \cos(i) \quad (78)$$

avec R le rayon de la Terre, $2a$ le grand axe de l'orbite, ϵ l'excentricité et i l'inclinaison (*e.g.* Battin, 1999).

L'équation fait intervenir les trois paramètres a , ϵ et i . Si ceux-ci sont bien choisis pour que

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dt} = \frac{360}{365} \quad (79)$$

la rotation du noeud est égale à une rotation par an (soit $0,9856^\circ$ /jour), ce qui signifie que l'orbite reste fixe par rapport au Soleil alors que la Terre effectue sa révolution annuelle. Une telle orbite est appelée *héliosynchrone* (Fig. 28). Une analyse des valeurs possibles pour a , ϵ et i montre que i doit être supérieur à 90° , c'est-à-dire que l'orbite doit être rétrograde. Ces orbites sont particulièrement bien adaptées à l'observation de la Terre sous un éclairage constant (à basse latitude et sans tenir compte des variations saisonnières).

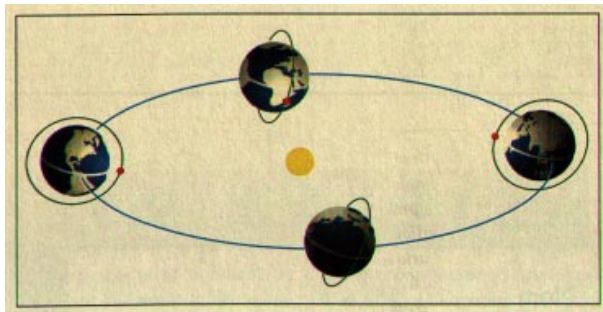


FIG. 28 - Orbite héliosynchrone.

Un autre effet est la rotation de la ligne des apsides. Celle-ci tourne dans le sens de rotation du satellite pour les satellites équatoriaux et en sens inverse pour les satellites polaires. Ce mouvement est décrit par l'équation :

$$\frac{d\omega}{dt} = 5 \left(\frac{R}{a} \right)^{3.5} (1 - \epsilon^2)^{-2} (5 \cos^2 i - 1) \quad (80)$$

en degrés par jour (*e.g.* Battin, 1999). Il existe une inclinaison, dite *critique*, pour laquelle la rotation de la ligne des apsides est nulle. On a

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (81)$$

si $(5 \cos^2 i - 1) = 0$, soit $i = 63^\circ 26' 06''$. Ces orbites critiques sont bien adaptées aux communications et à la météorologie dans les régions de haute latitude pour lesquelles une orbite géostationnaire d'inclinaison nulle n'est pas souhaitable. Les Russes utilisent régulièrement ces orbites qui ont été baptisées *orbites de Molnyia* (Fig. 29).

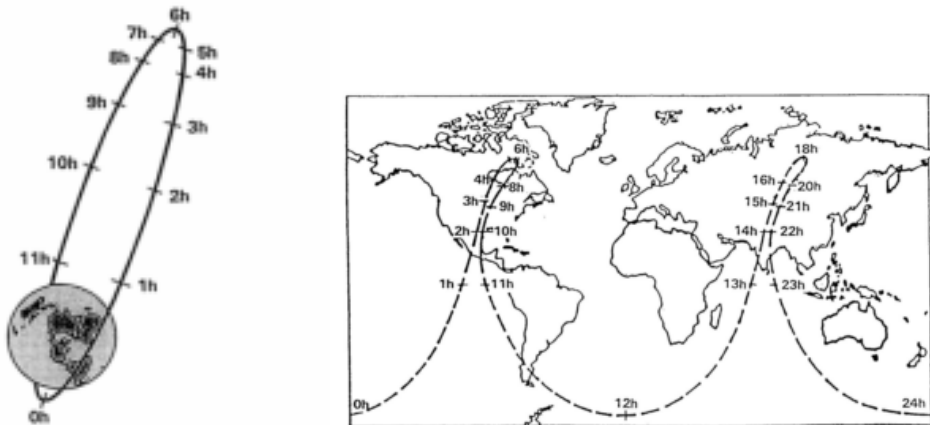


FIG. 29 - Orbites de Molnyia.

7.5 Interactions à trois corps et points de Lagrange.

Au fur et à mesure que l'altitude augmente, l'influence du potentiel gravifique terrestre diminue et l'effet de la Lune et du Soleil devient prépondérant. Ce passage est un problème d'interaction entre trois corps. Il n'est pas soluble analytiquement ; les solutions sont donc purement numériques. Pour définir les conditions dans lesquelles la solution à deux corps est toujours valable, on introduit la notion de *sphère d'influence*. La sphère d'influence est définie en fonction de l'importance relative de la force

perturbatrice du troisième corps. C'est ainsi que dans un rayon de 14900 km autour de la Lune, la force d'attraction de la Terre est inférieure à 1% de la force gravitationnelle de la Lune. De même, autour de la Terre, l'influence gravitationnelle du Soleil est inférieure à 1% dans une sphère de 371.000 km de rayon.

Il existe des orbites impliquant 3 corps qui sont importantes et intéressantes. Il s'agit des orbites de Lagrange ou *points de Lagrange* (e.g. Rochus, 1999). Les points de Lagrange (Fig. 30) pour deux corps célestes en révolution mutuelle sont 5 points tels qu'un objet massif situé en ces points reste en position relative constante par rapport aux deux corps célestes.

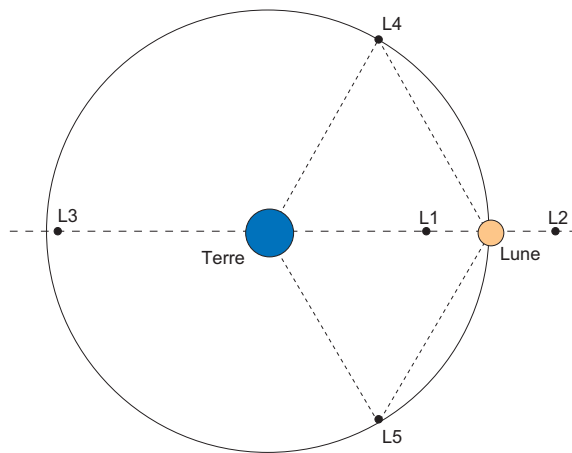


FIG. 30 - Points de Lagrange du système Terre-Lune.

Les points L1, L2 et L3, alignés avec les deux corps célestes considérés, sont toujours instables. Les points L4 et L5 forment des triangles équilatéraux avec les centres des deux corps célestes. Ils sont stables ou instables selon les masses des corps en présence. Les points L4 et L5 du système Terre-Lune capturent des poussières qui sont parfaitement visibles au télescope. Les 14 astéroïdes Troyens orbitent autour des points de Lagrange stables L4 et L5 du système Soleil-Jupiter.

Les points L1 et L2 sont de plus en plus utilisés par les satellites scientifiques. C'est ainsi que SOHO, l'observatoire du Soleil est satellisé autour du point L1 du couple Soleil-Terre, à 1.500.000 km de la Terre d'où il voit le Soleil en permanence sans être perturbé par le passage dans l'ombre de la Terre. De même, le successeur du Hubble Space Telescope, le Next Generation Space Telescope, sera satellisé autour du point L2.

8 Bibliographie.

- Battin Richard H. (1999). *An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education series, 796 pp.
- Delhez Eric J.M. (1999). *Analyse Mathématique*, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, Centrale des Cours de L'A.E.E.S., 408pp.
- Delhez Eric J. M. et Nihoul Jacques C.J. (1996). *Mécanique rationnelle. Modèle mathématique de Newton*, E. Riga Editeur, 299pp.
- Pascoli Gianni (1995). *La Gravitation*, Que sais-je ? Presses Universitaires de France, n°2489, 128pp.
- Rochus Pierre (1999). *Notions de mécanique céleste et orbites de satellites artificiels*, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 300pp.

Lectures suggérées pour en savoir plus.

- Bate R., Mueller D. et White J. (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publication, 455pp. - Livre de référence pour les fondements de la mécanique céleste.
- Béletski V. (1986). *Essais sur le mouvement des corps cosmiques*, MIR, 368pp. - Présentation originale et parfois humoristique mais aussi assez mathématique des différents problèmes classiques rencontrés en mécanique céleste.
- Brown Charles D. (1992). *Spacecraft Mission Design*, AIAA Education series, 187pp. - Présentation simple de la définition et de l'analyse de missions spatiales. Cet ouvrage comprend un logiciel de détermination d'orbites assez simple.
- Chobotov Vladimir A. (1996). *Orbital Mechanics*, 2nd Edition, AIAA Education series, 447pp. - La référence plus pratique complémentaire à l'ouvrage de Battin pour l'astrodynamique.
- Feynman Richard (1997). *Le mouvement des planètes autour du soleil*, Diderot Multimédia, 162pp. - Démonstrations purement géométriques des lois de Kepler qu'aurait utilisées Newton.
- Logsdon Tom (1998). *Orbital Mechanics : Theory and Applications*, J. Wiley Interscience, 268pp. - Présentation originale, très illustrée, des différents problèmes classiques rencontrés en mécanique céleste.
- Pascoli Gianni (1993). *Eléments de mécanique céleste*, Armand Colin, 188pp - Introduction générale à la mécanique céleste des corps naturels.
- Rimrott F.P.J. (1989). *Introductory Orbit Dynamics*, Vieweg, 193pp. - Présentation claire et de lecture aisée qui aborde les problèmes classiques principaux rencontrés en mécanique céleste.

9 Remerciements.

Les auteurs remercient Olivier Absil et Véronique Rochus pour la réalisation d'une partie des figures.

Ils remercient également Jean-François Dohogne, Anne-France Fontaine, Séverine Lepage, Bernard Potier, Christophe Thomas et Pierre Vueghs qui ont relu ces notes de façon très constructive.

Ils tiennent enfin à associer à ce projet l'ensemble des étudiants ingénieurs civils de seconde candidature qui ont suivi le cours pivot durant l'année académique 1999-2000.