Prof. Éric J.M.DELHEZ

Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Mars 2022

Question I

i. La convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ implique-t-elle la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$? Justifiez.

ii. La convergence des séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$? Justifiez.

iii. Montrez que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

définit une fonction continument dérivable sur $\mathbb{R}$ si a et b sont des constantes réelles telles que $0 < a < 1$ et $0 < ab < 1$.

N.B. : Si ces conditions sur les constantes a et b ne sont pas remplies, la fonction représentée par la série peut présenter des comportements étonnants. Par exemple, la série représente une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part si $0 < a < 1$ et $ab > 1 + (3\pi)/2$.

Question II

i. Étudiez la convergence de la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{1+k^2}$$

ii. Étudiez la convergence de la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{1+k}$$

iii. Étudiez en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ la convergence de la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^{\beta}(1/k)}{k}$$

Suggestion : on pourra utiliser le résultat $x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) > 1,\ \forall x \geq 1.$

Question III

i. Déterminez le domaine de définition de

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k(k+1/2)}$$

ii. Exprimez $S'(x)$ en série de puissances. Pour quelles valeurs de x cette expression est-elle valable ? Justifiez.

iii. Sachant que

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in [-1, 1[,$$

déterminez une expression de S au moyen de fonctions connues valable sur l'intervalle de convergence.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Quel que soit $k \geq 1$, on a

$$\left|\frac{a_k}{\sqrt{k}}\right| = \frac{|a_k|}{\sqrt{k}} \leq |a_k|$$

Le terme général de la série des $|a_k/\sqrt{k}|$ est donc majoré par le terme général d'une série numérique convergente puisque la série des a_k est absolument convergente.

Par le critère de comparaison, on en déduit la convergence absolue de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$$

Total i. : 3 pts (0 pt si affirmation correcte mais sans justification)

ii. La série numérique de terme général

$$a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^k v_k$$

est convergente en tant que série alternée avec $v_k = 1/\sqrt{k}$ tendant monotonément vers zéro.

Contre-exemple approprié dont on mentionne qu'il converge (même sans justification) : 2 pts

Par contre, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

est divergente en tant que série harmonique. Ce contre-exemple montre que l'énoncé est faux.

Explication de la divergence de la série des $a_k b_k$: 1 pt

Total ii. : 3 pts

iii. Considérons la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x) \;\text{ où }\; 0 < a < 1 \text{ et } 0 < ab < 1$$

Cette série définit une fonction $f \in C_1(\mathbb{R})$ car elle vérifie les 3 hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions.

- $f_k(x) = a^k \cos(b^k \pi x) \in C_1(\mathbb{R})$

  $f_k \in C_1(\mathbb{R})$: 1pt

- La série

  $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

  converge sur $\mathbb{R}$. Le critère de comparaison permet même d'en justifier la convergence absolue. On a en effet

  $$|a^k \cos(b^k \pi x)| \leq a^k, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

  où a^k est le terme général d'une série géométrique (à termes positifs) de raison $a < 1$ convergente.

  Hypothèse de convergence de la série : 1 pt

  Justification de la convergence : 1 pt

- La série des dérivées

  $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -a^k b^k \pi \sin(b^k \pi x)$$

  Expression de la série des dérivées : 1 pt

  Hypothèse de convergence uniforme de la série des dérivées : 1 pt

  Preuve de la convergence uniforme de la série des dérivées : 1 pt converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque son terme général est majoré en module par le terme général d'une série numérique convergente (Critère de Weierstrass). On a en effet

$$|a^k b^k \pi \sin(b^k \pi x)| \leq (ab)^k \pi, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

où $(ab)^k\pi$ est le terme général d'une série géométrique de raison $ab < 1$ convergente.

Total iii. : 6 pts

TOTAL QI *:12 pts*

Question II

i. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{1+k^2}$ est à termes positifs. Son terme général tend vers zéro et vérifie donc cette condition nécessaire de convergence.

Série à termes positifs : 1 pt

On a

$$\frac{\ln k}{1+k^2} \sim \frac{\ln k}{k^2} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \ (k \to +\infty)$$

puisque $\ln k = o(\sqrt{k})$, $(k \to +\infty)$. La série est donc convergente.

Application correcte d'un critère : 1 pt

Conclusion correcte : 2 pts

Total i. : 4 pts

ii. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{1+k}$ est à termes positifs. Son terme général tend vers zéro et vérifie donc cette condition nécessaire de convergence.

Série à termes positifs : 1 pt

La série diverge puisque

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{\ln k}{1+k}\right), \ (k \to +\infty)$$

Application correcte d'un critère : 1 pt

Conclusion correcte : 2 pts

Ce résultat évident peut être vérifié en calculant

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{\ln k}{1+k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1+k}{k\ln k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1+k}{k} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\ln k} = 1 \cdot 0 = 0$$

La justification des comportements asymptotiques évidents par un calcul de limite n'est pas nécessaire.

Total ii. : 4 pts

iii. Les termes de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^\beta(1/k)}{k}$ sont de signe variable.

Pour préciser le comportement du terme général, on note que la formule de Taylor permet d'écrire

$$\sin x \sim x, \quad (x \to 0)$$

de sorte que

$$\sin(1/k) \sim 1/k, \quad (k \to +\infty)$$

Dès lors,

$$\frac{\sin^\beta(1/k)}{k} \sim \frac{(1/k)^\beta}{k} = \frac{1}{k^{\beta+1}}, \qquad (k \to +\infty)$$

On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} (-1)^k \frac{\sin^\beta(1/k)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\beta+1}} \begin{cases} = 0 \text{ si } \beta > -1 \\ \neq 0 \text{ si } \beta \leq -1 \end{cases}$$

Pour $\beta \leq -1$, le terme général de la série ne tend pas vers zéro et la série diverge (avec et sans modules).

Divergence justifiée si $\beta \leq -1$: 3 pts

Pour étudier la convergence absolue de la série, on note que, $\forall k \geq 1$, $0 < 1/k \leq 1$ et $\sin^\beta(1/k) > 0$ de sorte que

$$\left|(-1)^k \frac{\sin^\beta(1/k)}{k}\right| = \frac{\sin^\beta(1/k)}{k} \sim \frac{1}{k^{\beta+1}}, \qquad (k \to \infty)$$

Convergence absolue justifiée pour $\beta > 0$: 3 pts (dont 1 pt pour le caractère absolu)

La série converge donc absolument si $\beta + 1 > 1$, c'est-à-dire si $\beta > 0$. Elle ne converge pas absolument si $\beta \leq 0$.

Étudions maintenant la possibilité de semi-convergence de la série pour $-1 < \beta \leq 0$. La série est alternée et peut s'écrire sous la forme

Série alternée : 1 pt

$$(-1)^k \frac{\sin^\beta(1/k)}{k} = (-1)^k v_k$$

où

$$v_k = \frac{\sin^\beta(1/k)}{k} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} v_k = 0$$

$\lim_{k\to+\infty} v_k = 0$ si $\beta > -1$: 1 pt

Décroissance monotone : 2 pts (dont 1 pt pour la justification)

De plus, v_k tend monotonément vers 0 puisque, en considérant k comme une variable réelle pour le calcul de la dérivée et en prenant en compte la suggestion donnée dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk}\left(\frac{\sin^\beta(\frac{1}{k})}{k}\right) &= \frac{\beta \sin^{\beta-1}(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k})\left(\frac{-1}{k^2}\right)k - \sin^\beta(\frac{1}{k})}{k^2} \\
&= -\frac{1}{k^2}\sin^{\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\left[\frac{\beta}{k}\cos\left(\frac{1}{k}\right) + \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{k^3}\sin^{\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\right)\left[\beta + k\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{k}\right)\right] \\
&< -\frac{1}{k^3}\sin^{\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\right)(\beta+1),\ \forall k \geq 1 \\
&< 0, \quad \forall k \geq 1,\ -1 < \beta \leq 0
\end{aligned}$$

NB : Semi-convergence justifiée correctement pour le seul cas $\beta = 0$: Maximum 2 pts sur les 5 pts de la semi-convergence

Dès lors, la série est semi-convergente pour $-1 < \beta \leq 0$.

Semi-convergence si $-1 < \beta \leq 0$: 1 pt

En conclusion, on a

- la série diverge si $\beta \leq -1$;
- la série est semi-convergente si $-1 < \beta \leq 0$;
- la série est absolument convergente si $\beta > 0$.

Présence d'une conclusion cohérente avec les résultats obtenus : 1 pt

Total iii. : 12 pts
TOTAL QII *:20 pts*

Question III

i. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k(k+1/2)}$$

définit une fonction $S(x)$ en tous les points où elle converge.

Domaine = domaine de convergence simple de la série (annoncé ou mis en pratique) : 1 pt

Le terme général

$$u_k = \frac{x^{2k+1}}{k(k+1/2)}$$

n'étant pas positif pour tous les x, le critère du quotient est appliqué à la série des modules :

Formulation correcte d'un critère appliqué à la série des modules : 2 pts

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+3}}{|x|^{2k+1}} \frac{k(k+1/2)}{(k+1)(k+3/2)} = |x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1/2)}{(k+1)(k+3/2)} = |x|^2$$

Il nous assure que la série étudiée converge absolument si $|x|^2 < 1$, c'est-à-dire sur $I =]-1,1[$ où I est l'intervalle de convergence de la série, et diverge (avec et sans modules) sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Conclusion sauf en $x = \pm 1$: 2 pts

En $x = \pm 1$, la série des modules s'écrit

Conclusion en ± 1 : 2 pts

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1/2)}$$

où

$$\frac{1}{k(k+1/2)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad (k \to +\infty)$$

de sorte que les deux séries numériques convergent absolument.

La série converge donc sur $[-1,1]$ qui est le domaine de définition de la fonction S.

Domaine correct : 1 pt

Total i. : 8 pts

ii. Toute série de puissances est indéfiniment continument dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence. Ainsi,

Justification de la dérivation terme à terme : 1 pt

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k(k+1/2)}$$

Intervalle ouvert : 1 pt

est indéfiniment continument dérivable terme à terme sur $I =]-1,1[$ et il vient

Expression de la série des dérivées : 1 pt

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{2k}}{k(k+1/2)} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k}$$

Remarquons que, en $x = \pm 1$, la série des dérivées diverge puisqu'elle s'identifie à (un multiple de) la série harmonique

Divergence de la série des dérivées en ± 1 : 1 pt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

La possibilité de dériver terme à terme la série ne peut donc pas être étendue aux extrémités de l'intervalle de convergence.

Total iii. : 4 pts

iii. Utilisant le résultat

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in [-1,1[,$$

on peut alors écrire

$$S'(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k} = -2\ln(1-x^2)$$

Ce résultat est valable $\forall x \in]-1,1[$ puisque cette condition permet à la fois de justifier la dérivation terme à terme et d'utiliser le développement du logarithme.

Expression analytique de S' : 2 pts, dont 1 pt pour le domaine de validité

En primitivant l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$S(x) = \int -2\ln(1-x^2)\,dx + C$$

où C est une constante.
Effectuons cette primitivation par parties en posant

$$\begin{cases} f = -2\ln(1-x^2) \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{4x}{1-x^2} \\ g = x \end{cases}$$

Il vient successivement

Primitivation par parties : 1 pt
Expression analytique correcte sous une forme ou une autre : 2 pts

$$\begin{aligned} S(x) &= -2x\ln(1-x^2) - \int \frac{4x^2}{1-x^2}\,dx \\ &= -2x\ln(1-x^2) + 4\int \frac{(1-x^2)-1}{1-x^2}\,dx \\ &= -2x\ln(1-x^2) + 4\int dx - 4\int \frac{1}{1-x^2}\,dx \\ &= -2x\ln(1-x^2) + 4x - 4\operatorname{arcth} x + C \end{aligned}$$

La constante $C = 0$ peut être déterminée en considérant la condition

Détermination de la constante : 1 pt
L'expression de la primitive sous la forme $\int_0^x \ldots dt$ sans constante donne aussi droit au point de la constante.

$$S(0) = C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k(k+1/2)}\Bigg]_{x=0} = 0$$

Finalement,

$$S(x) = -2x\ln(1-x^2) + 4x - 4\operatorname{arcth} x,\ \forall x \in]-1,1[$$

La solution peut aussi être exprimée sous la forme

$$S(x) = -2x\ln(1-x^2) + 4x - 2\ln\frac{1+x}{1-x},\ \forall x \in]-1,1[$$

Total iii. : 6 pts
TOTAL QIII *:18 pts*

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

De façon générale, les notions de base relatives aux séries numériques sont insuffisamment acquises. En particulier, on prendra en compte les éléments suivants.

- Il faut distinguer les séries à termes positifs des séries dont le signe du terme général est variable car les critères applicables sont différents. La première étape dans l'étude de la convergence d'une série numérique est donc cette distinction entre séries à termes positifs et de signe variable.
- Les critères de comparaison, du quotient, de la racine et en k^α ne s'appliquent qu'à des séries à termes positifs. Si le terme général de la série n'est pas toujours positif, il faut appliquer le critère à la série des modules, ce qui permet de justifier la convergence absolue de la série.

- Si une série de signe variable ne converge pas absolument, il convient d'étudier sa semi-convergence. Un critère spécifique peut alors être appliqué aux séries alternées. Si on établit la semi-convergence par application de ce critère il est toujours attendu d'examiner l'éventuelle convergence absolue de la série car ce type de convergence est plus 'robuste' que la semi-convergence.
- Pour pouvoir affirmer qu'une série est alternée, il ne suffit pas de pouvoir l'écrire sous la forme $u_k = (-1)^k v_k$. Il faut encore démontrer que v_k est de signe constant.
- Il ne faut pas confondre le critère de comparaison et le critère en k^α. Même si l'idée de base est la même dans les deux critères (convergence si le terme général se comporte comme ou mieux que celui d'une série convergente et divergence si le terme général se comporte comme ou moins bien que celui d'une série divergente), le formalisme est tout à fait différent.

  Le critère en k^α se base sur des comportements asymptotiques pour $k \to +\infty$ et utilise comme référence les séries de Riemann.

  Le critère de comparaison se base sur une majoration pour $k \geq N$ où N est à déterminer et utilise comme référence n'importe quelle série à termes positifs ad hoc.

  Une très grande confusion a été constatée dans la dénomination et l'utilisation de ces deux critères.
- Que ce soit via le critère de comparaison ou le critère en k^α, aucune conclusion ne peut être tirée si le terme général se comporte mieux que celui d'une série divergente ou moins bien que celui d'une série convergente.

Question I

Outre les remarques générales données ci-dessus, on sera attentif aux points suivants.

i.
- Les séries des a_k et des $a_k/\sqrt{k}$ ne sont pas des séries à termes positifs. C'est donc aux séries des modules correspondantes qu'il faut appliquer le critère de comparaison. Ceci permet de justifier la convergence absolue de la série des $a_k/\sqrt{k}$ en utilisant la convergence absolue connue de la série des a_k.
- Les critères du quotient, de la racine, de comparaison et en k^α ne donnent que des conditions suffisantes de convergence. De la convergence absolue de la série des a_k on ne peut pas, par exemple, déduire que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \text{ ou } |a_k| \sim \frac{1}{k^\alpha}, \text{avec}\, \alpha > 1,\ (k \to +\infty)$$

- De

$$\frac{a_k}{\sqrt{k}} = o(a_k),\ (k \to +\infty)$$

  certains déduisent immédiatement que la série des a_k converge en appuyant leur raisonnement par une formule du type "la série se comporte mieux qu'une série convergente" ou en citant le critère de comparaison. Ce raisonnement est correct (mais très incomplet) même s'il ne suit explicitement aucun des énoncés démontrés dans le cours.

  Pour être complètement explicite, il conviendrait d'écrire que, par définition de la relation o, le comportement ci-dessus implique que, pour tout ε, il existe N tel que

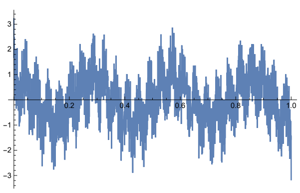
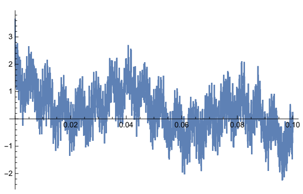
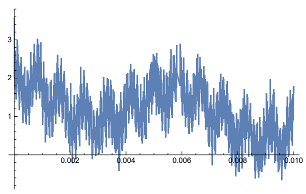
$$\left|\frac{a_k}{\sqrt{k}}\right| \leq \varepsilon |a_k|,\ \forall k \geq N$$

Dès lors, par le critère de comparaison et la convergence absolue de la série des a_k, on en déduit la convergence absolue de la série proposée.

ii.
- L'énoncé était faux. De trop nombreux étudiants ont cherché à démontrer qu'il était vrai alors que quelques essais avec différentes séries connues auraient permis de se rendre compte que ce n'était pas le cas.
- Les séries de cet énoncé ne sont pas à termes positifs. La démonstration ne devait donc pas faire cette hypothèse.
- Les critères du quotient, de la racine, de comparaison et en k^{α} ne s'appliquent qu'à des séries à termes positifs et ne donnent que des conditions suffisantes de convergence. Il n'était donc pas possible de déduire quoi que ce soit de ces critères pour les séries des a_k et des b_k.
- La série des produits $\sum a_k b_k$ n'est pas égale au produit des séries $\sum a_k \sum b_k$. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que $a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$. On ne peut donc pas déduire directement la convergence de la série des produits en se basant sur celle des séries données.

iii.
- Cet énoncé faisait clairement appel au théorème de dérivation des séries de fonctions. Ce théorème demande de vérifier 3 hypothèses : la continue dérivabilité des fonctions de la série, la convergence simple de la série et la convergence uniforme de la série des dérivées (sur un ensemble ad hoc). Aucune de ces hypothèses ne doit être oubliée.
- Remarquons que dans le théorème utilisé, la convergence simple de la série suffit alors que c'est la convergence uniforme de la série des dérivées qui est demandée.
- Rappelons qu'une fonction continûment dérivable ($\in C_1$) est une fonction continue, dérivable et dont la dérivée première est elle-même continue.
- La série donnée n'est pas une série de puissances. Une série de puissances s'écrit en général $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$. La variable x ne peut apparaitre que dans une puissance, pas dans un cosinus. On ne pouvait donc appliquer les résultats spécifiques aux séries de puissances.
- On ne peut pas déduire de $0 < a < 1$ et $0 < ab < 1$ que $0 < b < 1$. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer $a = 1/3$ et $b = 2$.
- Afin de démontrer la convergence simple de la série, le critère de la racine basé sur le calcul de
$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a^k \cos(b^k \pi x)|}$$
ne peut être appliqué puisque la limite du cosinus n'existe pas à l'infini si $b > 1$.

NB Comme indiqué dans l'énoncé, la fonction étudiée ici présente un caractère très étrange pour certaines valeurs de a et b. À titre d'exemple, les figures ci-dessous présentent les graphiques de cette fonction sur les intervalles $[0,1]$, $[0,0.1]$ *et* $[0,0.01]$ *dans le cas où* $a = 4/5$ *et* $b = 9$. *À toutes les échelles, au fur et à mesure qu'on se concentre sur une plus petite zone, on voit apparaître des sauts intempestifs de plus en plus nombreux de la fonction. On peut montrer que la fonction est continue mais n'est dérivable en aucun point.*

Question II

Outre les remarques générales données plus haut, on sera attentif aux éléments suivants.

i. et ii.

- Si le calcul d'une limite implique le produit de deux termes se comportant comme 1^+ et 1^-, on ne peut en déduire simplement si la limite de 1 est approchée par valeur supérieure (1^+) ou par valeur inférieure (1^-).
- Il faut utiliser correctement les opérateurs $\sim$ et o. On ne peut pas passer indifféremment de l'un à l'autre. Si $f = o(g)$, $(k \to +\infty)$, on ne peut pas en déduire que $f \sim g$, $(k \to +\infty)$. Par ailleurs, il faut toujours préciser le voisinage dans lequel on travaille quand on utilise un comportement asymptotique.
- À l'écriture

$$\frac{\ln k}{1+k^2} = o\left(\frac{\sqrt{k}}{1+k^2}\right),\ (k \to +\infty) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{k}}{1+k^2} \sim \frac{1}{k^{3/2}},\ (k \to +\infty)$$

donc

$$\frac{\ln k}{1+k^2} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),\ (k \to +\infty),$$

on préférera écrire, de façon plus naturelle et plus compacte,

Puisque $\ln k = o(\sqrt{k}),\ (k \to +\infty)$,

$$\frac{\ln k}{1+k^2} \sim \frac{\ln k}{k^2} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),\ (k \to +\infty)$$

iii.

- La discussion en fonction d'un paramètre ne doit jamais être menée en considérant des valeurs particulières du paramètre ($\beta = 0$, $\beta = 1$, ...) choisies arbitrairement ou en séparant systématiquement les cas où le paramètre est positif, négatif ou nul. Ce n'est que quand un résultat ou un raisonnement n'est pas valable pour certaines valeurs du paramètre qu'une discussion s'impose. Ici, la condition nécessaire de convergence demandait que β soit strictement supérieur à -1 pour que la série ait une chance de converger. C'est donc au départ par rapport à cette valeur pivot de -1 qu'il fallait discuter. Ensuite, l'étude de la convergence absolue, seulement vraie pour $\beta > 0$, amenait une autre discussion.
- La série donnée n'est pas à termes positifs. Il faut donc commencer par déterminer pour quelles valeurs du paramètre la convergence est absolue. Comme la série est alternée, il est ensuite possible de vérifier si elle est semi-convergente dans les autres cas en utilisant le critère correspondant.
- Dans l'étude de la semi-convergence, la justification du caractère monotone de la décroissance du v_k ne peut être menée en considérant le comportement asymptotique de v_k. Elle doit être réalisée, comme dans la solution-type proposée, se basant sur le signe de v'_k.
- Le calcul des limites faisant intervenir les puissances de la fonction $\sin(1/k)$ a été très mal réalisé. Le comportement asymptotique $\sin(1/k) \sim 1/k$, $(k \to +\infty)$ permettait de simplifier ces calculs.
- Dans tout problème présentant un paramètre, une conclusion reprenant les différents résultats obtenus en fonction du paramètre est indispensable.

Question III

i.
- C’est à la série des modules que le critère du quotient doit être appliqué.
- Il ne faut pas confondre le domaine de convergence de la série de puissances et son intervalle de convergence. L’intervalle de convergence est l’ouvert sur lequel la série converge absolument (celui où le critère du quotient ou de la racine donne une limite < 1). Le domaine de convergence peut s’étendre aux extrémités de cet intervalle si les séries numériques correspondantes sont convergentes. La série de puissances représente une fonction continue sur son domaine de convergence mais elle ne représente a priori une fonction indéfiniment continûment dérivable que sur son intervalle de convergence.
- Remarquons que, en $x = -1$, la série devient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k(k+1/2)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1/2)}$$

qui n’est pas une série alternée mais une série dont tous les termes sont négatifs et dont la convergence peut donc être étudiée comme celle des séries à termes positifs.

ii.
- Pour justifier la dérivation terme à terme de la série, il faut mentionner qu’il s’agit d’une série de puissances et que cette opération est donc permise sur son intervalle de convergence (voir ci-dessus).
- Afin de pouvoir étendre cette possibilité de dériver terme à terme aux extrémités de l’intervalle de convergence, il faut vérifier si la série des dérivées y converge. Ce n’est pas le cas ici.

iii.
- Les séries ne se manipulent pas comme des nombres. Comme mentionné plus haut, la série des produits n’est pas égale au produit des séries et, par exemple, on ne peut pas écrire

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k x^k}{k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = 2\ln^2(1-x)$$

- Quand la fonction recherchée s’exprime au moyen d’une intégrale qui peut être calculée analytiquement, il faut réaliser ce calcul et déterminer la constante d’intégration. Si l’intégrale ne peut pas être calculée, le choix de la primitive sera réalisé pour que celle-ci vérifie une condition auxiliaire (valeur connue en un point). Ici, on aurait pu exprimer la primitive qui s’annule en $x = 0$ sous la forme

$$S(x) = \int_0^x -2\ln(1-t^2)\, dt$$