LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2021

Analyse Mathématique 2
Évaluation formative

Question I

i. Étudiez la convergence de la série numérique

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 k}$$

ii. Étudiez en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ la convergence de la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{\ln k}}{k^\beta}$$

Question II

On pose

$$f_k(x) = \frac{1-kx^5}{1+kx^4}$$

i. Vers quelle fonction f la suite des f_k converge-t-elle sur $\mathbb{R}$?

ii. Quelle conclusion peut-on en tirer quant à la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite des f_k ? Justifiez.

Question III

i. Déterminez le développement en série de puissances de la fonction $\ln(1+2x)$ et son intervalle de convergence à partir de

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \qquad \forall y \in]-1,1[$$

ii. Déterminez l'expression en série de puissances de

$$\int \frac{\ln(1+2x^2)}{x}\, dx$$

(où l'intégrande est prolongé continûment en $x=0$ en lui assignant la valeur nulle) et l'intervalle de convergence de cette primitive. Justifiez.
Attention : l'argument du logarithme diffère entre les items i et ii/iii.

iii. Évaluez

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx$$

avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 k}$ est une série à termes positifs dont le terme général tend vers 0.

Série à termes positifs : 1 pt

Compte tenu de la croissance lente de la fonction ln, le terme général tend vers 0 moins vite que celui de la série harmonique, *i.e.*

Divergence : 2 pts

Justification par un critère approprié : 2 pts

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{1}{\ln^3 k}\right), \quad (k \to \infty)$$

La série est donc divergente.

Remarquons que ce comportement asymptotique peut être vérifié en évaluant la limite

Inutile de justifier les comportements asymptotiques corrects par un calcul de limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{1/\ln^3 k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln^3 k}{k} = 0$$

par trois applications successives de l'Hospital.

Total i. : 5 pts

ii. La série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{\ln k}}{k^\beta}$ est une série alternée.

Série alternée : 1 pt

- On a

  Divergence si $\beta \leq 0$: 1 pt

  Justification de la divergence si $\beta \leq 0$ par le calcul de la limite ou par application d'un critère : 1 pt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln k}}{k^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 0 \\ +\infty & \text{si } \beta \leq 0 \end{cases}$$

  La série est donc divergente pour $\beta \leq 0$ puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

- Étudions la convergence absolue de la série pour $\beta > 0$.

  Pour tout $\beta > 1$, $1/k^\beta$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Le facteur $\sqrt{\ln k}$ au numérateur perturbe la convergence, mais seulement de façon modérée puisqu'il est dominé par n'importe quelle puissance de k. Dès lors, pour tout $\beta > 1$, on peut trouver α strictement compris entre 1 et β, par exemple $\alpha = (\beta+1)/2 > 1$, tel que

  Convergence si $\beta > 1$: 1 pt

  Caractère absolu : 1 pt

  Justification de la convergence absolue pour $\beta > 1$ par application correcte d'un critère : 2 pts

$$\frac{\sqrt{\ln k}}{k^\beta} = o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), \quad (k \to \infty)$$

  Ceci peut être vérifié explicitement en calculant

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln k}/k^\beta}{1/k^{(\beta+1)/2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln k}\, k^{(\beta+1)/2}}{k^\beta} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln k}}{k^{(\beta-1)/2}} = 0$$

  puisque $\beta > 1$.

  La série est donc absolument convergente si $\beta > 1$ puisque son terme général se comporte en module mieux que celui d'une série de Riemann convergente.

  Pour tout $\beta \in]0,1]$, $1/k^\beta$ est le terme général d'une série numérique divergente et la présence du facteur $\sqrt{\ln k}$ ne fait qu'empirer les choses. Plus précisément, on a

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{\sqrt{\ln k}}{k^\beta}\right), \quad (k \to \infty)$$

puisque, dans ce cas,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{\sqrt{\ln k}/k^{\beta}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{1-\beta}\sqrt{\ln k}} = 0$$

La série ne converge donc pas absolument si $\beta \leq 1$ puisque son terme général se comporte en module moins bien que celui de la série harmonique qui diverge.

Divergence en module si $\beta \leq 1$: 1 pt
Justification de la divergence en module par application d'un critère de divergence : 2 pts

- Dans le cas où $0 < \beta \leq 1$, la série ne converge pas absolument et il convient de déterminer si elle est semi-convergente. Le terme général de cette série alternée s'écrit

$$u_k = (-1)^k v_k \quad \text{avec} \quad v_k = \frac{\sqrt{\ln k}}{k^{\beta}} > 0$$

Elle est dès lors semi-convergente si v_k tend monotonément vers zéro.
Le terme général tend effectivement vers zéro puisque

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\ln k}}{k^{\beta}} = 0$$

Il tend monotonément vers zéro puisque (étendant l'étude du comportement de v_k aux valeurs de k réelles pour pouvoir en considérer la dérivée)

$$\frac{d v_k}{dk} = \frac{\dfrac{k^{\beta}}{2k\sqrt{\ln k}} - \beta k^{\beta-1}\sqrt{\ln k}}{k^{2\beta}} = \frac{1-2\beta \ln k}{2k^{\beta+1}\sqrt{\ln k}}$$

La décroissance de v_k vers zéro est donc assurée si $1-2\beta\ln k < 0$ c'est-à-dire pour $k > e^{1/2\beta}$.

Dès lors, la série est semi-convergente pour $0 < \beta \leq 1$.

Semi-convergence si $\beta \in]0,1]$: 1 pt
Énoncé ou mise en oeuvre de la condition suffisante de semi-convergence : 1 pt
Limite nulle calculée ici ou plus haut : 1 pt
Démonstration de la décroissance monotone : 1 pt. Pas de pénalité si on ne précise pas à partir de quel k.

En conclusion, la série est

- absolument convergente si $\beta > 1$;
- semi-convergente si $\beta \in]0,1]$;
- divergente si $\beta \leq 0$.

Tableau récapitulatif (complet) des résultats : 1 pt, accordé si cohérence avec les résultats obtenus même si ceux-ci sont faux.
Total ii : 15 pts
TOTAL QI : 20 PTS

Question II

i. Pour $x \neq 0$, on calcule aisément

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1-kx^5}{1+kx^4} = -x$$

Limite pour $x \neq 0$: 2 pts

En $x = 0$, on a

$$f_k(0) = 1 \quad \forall k \qquad \text{donc} \qquad \lim_{k\to\infty} f_k(0) = 1$$

Limite pour $x = 0$: 1 pt

Ainsi, la suite des f_k converge sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Expression de f : 1 pt
Total i. : 4 pts

ii. On remarque que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$$

de sorte que la fonction f n'est pas continue en $x = 0$.

La discontinuité de f en $x = 0$ indique que la convergence de la suite des f_k n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. En effet, si la convergence était uniforme, la limite des $f_k \in C_0(\mathbb{R})$ serait continue sur $\mathbb{R}$.

$f_k \in C_0(\mathbb{R})$: 1 pt
f pas continue en $x = 0$: 1 pt

Convergence non uniforme : 1 pt
Appel au théorème sur la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues : 1 pt

Total ii. : 4 pts
TOTAL QII : 8 PTS

Question III

i. Sur $]-1/2, +\infty[$, on a

$$\frac{d}{dx}\ln(1+2x) = \frac{2}{1+2x}$$

et donc, en exprimant la primitive qui s'annule en $x = 0$,

$$\ln(1+2x) = \int_0^x \frac{2}{1+2t}\,dt$$

Or,

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \qquad \forall y \in]-1,1[$$

de sorte que

$$\frac{1}{1+2t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-2t)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k t^k \qquad \forall t \in]-1/2, 1/2[\quad \text{puisque } -2t \in]-1,1[$$

soit

$$\ln(1+2x) = \int_0^x 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k t^k\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{k+1} t^k\,dt \qquad \forall x \in]-1/2, 1/2[$$

Domaine de définition pas attendu.
Expression de $\ln(1+2x)$ comme primitive de $2/(1+2x)$: 1 pt
Choix de la primitive qui s'annule en $x = 0$ en utilisant les bornes d'intégration correctes (méthode 1) ou en fixant la constante (méthode 2) : 2 pts, dont 1 pt si présence d'une constante non déterminée ou fausse ou de bornes non correctes

Utilisation correcte (avec $-2t$) de la série géométrique : 1 pt

Comme la série est une série de puissances, on peut l'intégrer terme à terme sur tout intervalle $[0,x]$ inclus dans son intervalle de convergence $]-1/2, 1/2[$. On a donc

$$\begin{aligned}\ln(1+2x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{k+1}\int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \forall x \in]-1/2, 1/2[\end{aligned}$$

Justification de l'intégration/primitivation terme à terme : 1 pt

Résultat de l'intégration/primitivation terme à terme : 2 pts

Cette série conserve le même intervalle de convergence que la série de puissances initiale, soit $]-1/2, 1/2[$.

Intervalle de convergence : 1 pt

Total i. : 8 pts

Il est aussi possible de travailler avec la primitive.

$$\int \frac{2}{1+2x}\, dx = \ln(1+2x) + C$$

En utilisant la série géométrique,

Répartition des points pour la méthode 2 : voir méthode 1

$$\begin{aligned}
\ln(1+2x) + C &= \int 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \int x^k dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \forall x \in]-1/2, 1/2[
\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait qu'une série de puissances est primitivable terme à terme sur son intervalle de convergence et que la primitive conserve le même intervalle de convergence que la série initiale.

La constante C peut être déterminée en évaluant les deux membres en $x = 0$, soit

$$\ln(1+2x)\Big|_{x=0} + C = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{x=0}$$

de sorte que $C = 0$ et, finalement,

$$\ln(1+2x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \forall x \in]-1/2, 1/2[$$

ii. En utilisant le développement en série obtenu au point i., on peut représenter l'intégrande par la série de puissances

Représentation en série de puissances de l'intégrande : 2 pts

$$\frac{\ln(1+2x^2)}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{k+1}$$

L'intervalle de convergence de cette série de puissances est décrit par $x^2 < 1/2$, soit $x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$. Remarquons que la division par x n'introduit aucune difficulté particulière dans l'expression de la série de puissances.

La série de puissances peut être primitivée terme à terme sur son intervalle de convergence et la série obtenue garde le même intervalle de convergence. Pour tout $x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, on a donc [1]

Justification de la primitivation terme à terme : 1 pt

Résultat de la primitivation terme à terme : 2 pts, dont 1 pt pour la présence d'une constante

Intervalle de convergence : 1 pt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \int \frac{x^{2k+1}}{k+1}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(k+1)(2k+2)} + C \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k \frac{x^{2k+2}}{(k+1)^2} + C
\end{aligned}$$

où C est une constante.

Total ii. : 6 pts

1. Afin de pouvoir considérer cette égalité sur $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, on conviendra, comme indiqué dans l'énoncé, de prolonger continûment l'intégrande apparaissant dans le membre de gauche en lui assignant la valeur nulle en $x = 0$.

iii. Puisque $[0, 1/2] \subset]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k \frac{x^{2k+2}}{(k+1)^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{k+2}(k+1)^2}$$

Série représentant l'intégrale : 2 pts

Il s'agit d'une série alternée dont le terme général tend monotonément vers 0. L'erreur ε commise en remplaçant la série par une de ses sommes partielles est inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé. On peut donc arrêter le développement dès que la valeur absolue du premier terme a_k négligé est inférieure à 10^{-2}.

Identification d'une série alternée dont le terme général tend monotonément vers 0 : 1 pt

Principe de l'évaluation de l'erreur : 1 pt

On calcule successivement

$$a_0 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \qquad a_1 = -\frac{1}{2^3.2^2} = -\frac{1}{32}$$

et

$$a_2 = \frac{1}{2^4.3^2} = \frac{1}{144} < 10^{-2}$$

La valeur approchée de l'intégrale est donc donnée avec une erreur inférieure à 10^{-2} par

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx \approx \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{1}{2^{k+2}(k+1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

Choix de la somme partielle pour atteindre la précision : 1 pt

Valeur approchée de l'intégrale : 1 pt

Total iii. : 6 pts

TOTAL QIII : 20 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i. Les critères de convergence (quotient, racine, comparaison et en k^α) ne s'appliquent qu'à des séries à termes positifs. Il faut donc toujours préciser que c'est le cas quand on applique un de ces critères.

ii.
- Quand l'énoncé d'un exercice fait intervenir un paramètre, il faut envisager toutes les valeurs possibles pour ce paramètre. En particulier, il ne fallait pas ici considérer uniquement $\beta > 0$. Les cas $\beta \leq 0$ devaient aussi être traités. Une conclusion reprenant les résultats obtenus pour les différentes valeurs du paramètre est attendue quand une discussion est menée.
- Le critère de convergence en k^α est une condition suffisante de convergence. Sa non-vérification ne permet donc pas de conclure à la divergence de la série des modules. Un critère de divergence doit être utilisé pour justifier cette divergence.
- Si la série des modules diverge, la série peut quand même converger. On parle alors de semi-convergence. Un critère existe pour les séries alternées qui convergent si leur terme général tend monotonément vers 0. Pour utiliser correctement ce critère, il faut donc montrer
  - ◇ que la série est alternée ;
  - ◇ que son terme général tend vers 0 ;

◇ qu'il le fait monotonément. La justification de la décroissance du module du terme général (à partir d'un certain k) doit être menée en comparant deux termes consécutifs ou, comme il était plus facile à mettre en oeuvre ici, en montrant que sa dérivée est négative.

Question II

- La discontinuité de la fonction limite établie au point i. permettait de répondre facilement à la question posée en faisant appel au résultat sur la continuité des suites de fonctions. En effet, les f_k sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc, puisque leur limite ne l'est pas, c'est que l'autre hypothèse, à savoir la convergence uniforme de la suite, n'est pas vérifiée.
- Le critère de Cauchy pour la convergence uniforme ou la définition de la convergence uniforme d'une suite étaient par contre beaucoup plus complexes à mettre en oeuvre ici. Il ne suffisait évidemment pas d'en citer l'énoncé et de dire qu'il n'était pas vérifié pour conclure à la non-uniformité de la convergence.

  La définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions f_k vers f sur $\mathbb{R}$ s'écrit
  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \geq N) : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
  Pour prouver que les f_k ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}$, il faut donc vérifier la négation de cette définition, c'est-à-dire prouver que
  $$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N)(\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}, \exists k \geq N) : |f_k(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| > \varepsilon$$
  Considérons $\tilde{x} = 10^{-k}$. On a
  $$f_k(\tilde{x}) = \frac{1 - k\,10^{-5k}}{1 + k\,10^{-4k}} \quad \text{et} \quad f(\tilde{x}) = -10^{-k}$$
  de sorte que,
  $$|f_k(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| = \left| \frac{1 - k\,10^{-5k}}{1 + k\,10^{-4k}} + 10^{-k} \right| = \left| \frac{1 + 10^{-k}}{1 + k\,10^{-4k}} \right| > \frac{1}{2}$$
  où la majoration est valable quel que soit $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on peut se convaincre de la validité de cette inégalité pour k grand en notant que
  $$\lim_{k \to +\infty} \frac{1 + 10^{-k}}{1 + k\,10^{-4k}} = 1$$
  Ce raisonnement montre que la différence $|f_k(\tilde{x}) - f(\tilde{x})|$ ne peut être rendue inférieure à $\varepsilon = 1/2$ simultanément pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ de sorte que la convergence de la suite n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
- Le critère de Weierstrass relatif à la convergence uniforme des **séries** de fonctions n'était d'aucune utilité ici puisque nous nous interrogions sur la convergence uniforme d'une **suite** de fonctions.
- Le résultat relatif à la convergence uniforme des **séries** de **puissances** n'était pas non plus d'application puisqu'on est ici en présence d'une **suite** de **fonctions rationnelles**.

Question III

- En règle générale, quand une question comporte plusieurs sous-questions, les résultats établis dans les premières peuvent guider le raisonnement ou même, comme ici, être utilisés dans les suivantes. Dans cet exercice, le développement en série de puissances obtenu en i. était directement utilisable en ii. pour obtenir celui de l'intégrande puisqu'il suffisait de remplacer x par x^2 et de diviser la série par x. De même, pour calculer l'intégrale du point iii., il suffisait de faire varier la primitive obtenue au point ii. Remarquer ce genre de lien entre les sous-questions permet d'éviter de longs calculs potentiellement sources d'erreurs.
- De trop nombreuses erreurs algébriques se retrouvent dans les copies. Pour éviter ces erreurs et pour clarifier les développements, il est nécessaire de simplifier les expressions obtenues en regroupant les facteurs identiques sous un exposant unique et en simplifiant les puissances de -1.

$$(2x)^k = 2^k x^k, \quad \frac{2^k}{2^{2k+2}} = \frac{1}{2^{k+2}}, \quad (-1)^{k+2} = (-1)^k$$

i.
- Toutes les opérations analytiques réalisées sur les séries doivent être justifiées. En particulier, ici, la primitivation/intégration terme à terme de la série doit être justifiée par le fait que la série est une série de puissances.
- Quand un développement en série connu est utilisé pour obtenir le développement en série d'une autre fonction, il ne faut pas oublier d'adapter l'intervalle de convergence. L'intervalle de convergence de la nouvelle série s'obtient facilement par construction. Par exemple, ici, la série géométrique converge pour $y \in]-1,1[$. Si on utilise le développement en remplaçant y par $2t$, la convergence sera assurée pour $2t \in]-1,1[$, soit $t \in]-1/2, 1/2[$.
- La notation
$$\int f(x)dx$$
représente l'ensemble des primitives de la fonction f. Quand on veut identifier une fonction particulière au moyen de cette notation, il faut donc préciser de quelle primitive il s'agit. Ceci demande de connaitre la valeur de la fonction en un point et d'utiliser cette connaissance pour fixer les bornes d'intégration ou déterminer la constante. Dans cet exercice, la fonction $\ln(1+2x)$ s'annule en $x=0$. Il faut donc choisir la primitive de $2/(1+2x)$ qui s'annule en $x=0$ en écrivant soit
$$\ln(1+2x) = \int_0^x \frac{2}{1+2t}\,dt$$
soit
$$\ln(1+2x) = \int \frac{2}{1+2x}\,dx + C$$
où C est une constante qui annule le membre de droite en $x=0$.

ii.
- Il fallait ici aussi adapter l'intervalle de convergence de la série. De $x^2 \in]-1/2, 1/2[$, on déduit $x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$.
- Même remarque que ci-dessus. La notation
$$\int \frac{\ln(1+2x^2)}{x}dx$$
représente l'ensemble des primitives de la fonction $\ln(1+2x^2)/x$. Le résultat doit donc comprendre une constante d'intégration.

iii.

- Le résultat théorique sur l'évaluation de l'erreur de troncature de la série n'est valable que pour une série alternée dont le terme général tend monotonément vers 0. Il était donc indispensable de mentionner que l'on était bien dans le cadre d'application de ce résultat.
- Le résultat doit être mis en oeuvre correctement. Il précise que l'erreur commise en remplaçant la série par une de ses sommes partielles est inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé. On peut donc arrêter le développement au terme a_{n-1} dès que la valeur absolue de a_n est inférieure à 10^{-2}. Il ne faut pas inclure a_n dans l'approximation calculée.