Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2020

ANALYSE MATHÉMATIQUE 2

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du ***17 mars****.*

- ***Rédigez vos réponses aux questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre nom en MAJUSCULES suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

i. Si la série numérique $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, peut-on en déduire la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$? Justifiez.

ii. Justifiez la dérivabilité terme à terme sur $\mathbb{R}$ de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$$

Question II

On considère la série $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(1-k)}$$

i. Étudiez la convergence de cette série de fonctions.

ii. Sur quel domaine cette série définit-elle une fonction f ?

iii. Montrez en justifiant que, pour $x \in]-1,1[$, on a $f''(x) = -1/(1-x)$ et déduisez-en une expression analytique de f valable sur $]-1,1[$.

Question III

On considère la série $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

i. Étudiez la convergence de cette série de fonctions.

ii. Sur quel domaine cette série définit-elle une fonction f ?

iii. Montrez qu'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f est une solution du problème différentiel

$$4xf' + (\alpha + x) f = \alpha, \qquad f(0) = 1$$

Déterminez α et précisez l'intervalle sur lequel cette solution est valable.

iv. Calculez $f(1)$ avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Non. Pour le montrer, considérons la série

Contre-exemple correct : 2 pts

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Cette série converge (semi-convergence) en tant que série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers 0. Par contre, la série

Vérification de l'hypothèse : 1 pt

Violation de la thèse : 1 pt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverge (série harmonique).

Total i. : 4 pts

ii. La série des fonctions $f_k(x) = \dfrac{\sin(kx)}{k^3}$ vérifie les conditions suffisantes de dérivation terme à terme des séries de fonctions sur $\mathbb{R}$. On a en effet

- $f_k \in C_1(\mathbb{R})$;

  $f_k \in C_1(\mathbb{R})$: 1pt

- la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$ converge ;

  Convergence en $x_0 \in \mathbb{R}$: 2 pts

- la série des dérivées

  Expression de la série des dérivées : 1 pt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque son terme général est majoré en module par le terme général d'une série numérique convergente (Critère de Weierstrass),

Convergence uniforme de la série des dérivées justifiée : 2 pts

$$\left|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Total ii. : 6 pts

TOTAL QI : 10 PTS.

Question II

i. La série donnée

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(1-k)}$$

est une série de puissances. L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à considérer

Application correcte d'un critère à la série des modules : 2 pts

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k}\,\frac{k}{k+1}\,\frac{|1-k|}{|1-(k+1)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k}\,\frac{k}{k+1}\,\frac{k-1}{k} = |x|^-$$

- La série converge donc absolument si $|x| < 1$, c'est-à-dire si $x \in \mathtt{I} =]-1,1[$ où $\mathtt{I}$ est l'intervalle de convergence de la série.
- La série diverge (avec et sans module) si $|x| > 1$ c'est-à-dire si

Conclusions issues du critère : 4 pts avec une pénalité de 1 pt si “absolument” pas mentionné

$$x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

- Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $|x| = 1$.
  Nous devons donc étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à $x = 1$ et $x = -1$.
  Ces séries s'écrivent

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(1-k)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(1-k)}$$

Convergence (ou convergence absolue) en $x = 1$: 2 pts dont 1 pt pour la justification

La première est une série dont le terme général est toujours négatif. Pour étudier sa convergence, on peut considérer la série opposée

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

qui est une série à termes positifs convergente puisque

$$\frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad (k \to \infty)$$

Convergence absolue en $x = -1$: 2 pts dont 1 pt pour le caractère absolu de la convergence

i.e. son terme général est asymptotique au terme général d'une série de Riemann convergente.

La deuxième série est une série alternée qui converge absolument puisque le module de son terme général est asymptotique au terme général d'une série de Riemann convergente.

Conclusions sur la convergence uniforme : 3 pts dont 1 pt pour la justification par la série de puissances et 1 pt pour l'extension au fermé

La série de puissances converge donc simplement sur $[-1,1]$. En tant que série de puissances, elle converge aussi uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence $\mathtt{I} =]-1,1[$. De plus, puisque la série converge en $x = \pm 1$, sa convergence uniforme est assurée sur $[-1,1]$.

Total i. : 13 pts

ii. La série de puissances donnée définit une fonction en chacun des points où elle converge, c'est-à-dire sur l'intervalle $[-1,1]$.

Définir une fonction = converger : 1 pt
Intervalle correct : 1 pt
Total ii. : 2 pts

iii. La série de puissances définit une fonction $f(x)$ indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence $\mathtt{I} =]-1,1[$ et dont les dérivées successives se calculent en dérivant terme à terme. On obtient successivement

Justification théorique de la dérivation terme à terme : 1 pt
Calcul des dérivées : 1 pt
Utilisation de la limite de la série géométrique : 1 pt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{1-k} \\ f''(x) &= -\sum_{k=2}^{\infty} x^{k-2} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{-1}{1-x} \end{aligned}$$

où on a modifié l'indice de la série ($k \to k+2$) pour permettre l'identification d'une série géométrique convergente de raison x avec $|x| < 1$.
Dès lors, une première primitivation donne

$$f'(x) = \int \frac{-1}{1-x}\, dx + C = \ln(1-x) + C$$

où C est une constante. Si on tient compte du fait que $f'(0)=0$ puisque

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{1-k}\right]_{x=0}=0,$$

il vient $C=0$ et

$$f'(x)=\ln(1-x)$$

Une nouvelle primitivation, par parties cette fois, donne

Expression analytique correcte de $f(x)$: 2 pts, dont 1 pt pour la détermination des constantes

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(1-x)+\int\frac{x}{1-x}\,dx+\tilde{C} \\ &= x\ln(1-x)-\int\frac{1-x}{1-x}\,dx+\int\frac{1}{1-x}\,dx+\tilde{C} \\ &= x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)+\tilde{C} \end{aligned}$$

où la constante $\tilde{C}=0$ puisque

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k}}{k(1-k)}\right]_{x=0}=0$$

L'expression analytique de $f(x)$ valable sur $\mathtt{I}=]-1,1[$ s'écrit donc

$$f(x)=(x-1)\ln(1-x)-x$$

Total iv. : 5 pts

TOTAL QII : 20 PTS.

Question III

i. La série donnée

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{(2k)!}\,x^k$$

est une série de puissances.

L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}}{|x|^k}\,\frac{(k+1)!}{k!}\,\frac{(2k)!}{[2(k+1)]!}=|x|\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)}=0$$

Application correcte d'un critère à la série des modules : 2 pts

Conclusion issue du critère : 2 pts avec une pénalité de 1 pt si "absolument" pas mentionné

La série converge donc absolument sur $\mathbb{R}$. En tant que série de puissances, elle converge aussi uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence $\mathtt{I}=\mathbb{R}$.

Conclusion sur la convergence uniforme : 2 pts dont 1 pt pour la justification.

Pénalité de 1 pt si "convergence uniforme sur $\mathbb{R}$"

Total i. : 6 pts

ii. La série de puissances donnée définit une fonction en chacun des points où elle converge, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.

Définir une fonction = converger : 1 pt

Intervalle correct : 1 pt

Total ii. : 2 pts

iii. Toute série de puissances définit une fonction indéfiniment continument dérivable sur son intervalle de convergence et dont les dérivées successives sont obtenues en dérivant terme à terme. En particulier,

Justification ici ou plus tard de la dérivabilité terme à terme : 1 pt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!\,k}{(2k)!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!\,k}{(2k)!} x^{k-1}$$

Expression de la dérivée, avec ou sans le changement d'indice : 1 pt

puisque le terme correspondant à l'indice $k = 0$ est nul.

On a alors successivement

$$\begin{aligned}
&4xf'(x) + (\alpha + x)f(x)\\
&= 4x\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!\,k}{(2k)!} x^{k-1} + (\alpha + x)\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k\\
&= 4\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!\,k}{(2k)!} x^k + \alpha\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^{k+1} \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Manipulations permettant d'obtenir une série unique : 3 pts

où l'indice de la troisième série peut être modifié ($k \to k-1$) pour obtenir toutes des puissances x^k. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(2[k-1])!} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-1)!}{(2k-2)!} x^k$$

La deuxième série peut aussi être réécrite pour obtenir la même valeur initiale de l'indice sommatoire que dans les deux autres séries, soit

$$\alpha\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k = \alpha + \alpha\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

Finalement, ($\spadesuit$) s'écrit sous la forme d'une série unique

$$\begin{aligned}
\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[4\frac{k!k}{(2k)!} + \alpha\frac{k!}{(2k)!} - \frac{(k-1)!}{(2k-2)!}\right] x^k\\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-1)!}{(2k)!} \left[4k^2 + \alpha k - (2k)(2k-1)\right] x^k\\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-1)!}{(2k)!} (\alpha k + 2k) x^k\\
&= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} (\alpha + 2) x^k
\end{aligned}$$

Pour que f vérifie l'équation différentielle, cette expression doit être égale au second membre de l'équation, α. Ce sera le cas si $\alpha = -2$.

$\alpha = -2$: 1 pt

Par ailleurs, la condition initiale est également vérifiée par f puisque

Vérification de la condition initiale : 1 pt

$$f(0) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k\right]_{x=0} = 1$$

Validité de la solution sur l'intervalle de convergence $\mathbb{R}$ de la série : 1 pt

Si $\alpha = -2$, la fonction f définie par la série est donc bien une solution du problème différentiel proposé sur $\mathtt{I} = \mathbb{R}$ où la dérivation terme à terme est permise pour une série de puissances.

Justification de la dérivation terme à terme (si pas déjà attribué plus haut) : 1 pt

Total iii. : 8 pts

iv. En $x = 1$,

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!}$$

Il s'agit d'une série alternée convergente dont le module du terme général tend monotonément vers 0 puisque, d'une part,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k)(2k-1)\ldots(k+1)} = 0$$

et que, d'autre part, la fonction $k!/(2k)!$ est décroissante $\forall k \geq 0$.

L'erreur commise en approchant cette série par une de ses sommes partielles est donc majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé, soit

Principe de la majoration de l'erreur : 2 pts, dont 1 pt pour la justification

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon| \leq \frac{n!}{(2n)!}$$

Recherchons la plus petite valeur de n pour laquelle

$$\frac{n!}{(2n)!} \leq 10^{-2}$$

On calcule successivement

Valeur de n ad hoc : 1 pt

Valeur approchée de $f(1)$: 1 pt

$$\begin{aligned} n = 2, &\quad \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12} > 10^{-2} \\ n = 3, &\quad \frac{3!}{6!} = \frac{1}{120} < 10^{-2} \end{aligned}$$

On peut donc approcher $f(1)$ avec une erreur inférieure à 10^{-2} par

$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

Total iv. : 4 pts

TOTAL QIII : 20 PTS.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i. La confusion entre “condition nécessaire”, “condition suffisante” et “condition nécessaire et suffisante” est source de nombreuses fautes. Pour chacun des résultats théoriques et des critères établis au cours, il convient de bien identifier le sens des implications, *i.e.* ce qui implique quoi, et ne pas supposer que les implications peuvent être renversées.

- En particulier, rappelons que le terme général d’une série convergente tend vers zéro. C’est une condition nécessaire de la convergence. La réciproque est fausse. Il ne suffit pas que le terme général d’une série tende vers zéro pour que celle-ci converge.
  Pour cette raison, le **raisonnement suivant est erroné** :
  Comme
  $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ converge},$$
  son terme général tend vers 0*. La série des a_{2k} étant composée des termes d’indice pair de la série des a_k, son terme général tend aussi vers 0 .* ***Donc***,
  $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \textit{ converge.}$$
  L’erreur se situe dans la dernière implication. Toutes les séries dont le terme général tend vers 0 ne convergent pas forcément. La série harmonique en est un exemple.

- Dans la même ordre d’idées, les conditions suffisantes de convergence des séries à termes positifs apportées par les différents critères (quotient, racine comparaison et en k^{α}) ne peuvent être interprétées comme des conditions nécessaires. La convergence peut être acquise en dehors du cadre défini par ces critères de convergence.
  Dès lors, le **raisonnements suivant est erroné** :
  Puisque
  $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ converge},$$
  on peut en déduire que
  $$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$$
  Il existe des séries convergentes pour lesquelles ce rapport n’est pas strictement inférieur à 1. Par exemple, pour la série convergente
  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \quad \text{on a} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

ii. Pour répondre à une telle question, il est impératif de connaître la cadre théorique, en particulier les conditions suffisantes de dérivabilité terme à terme d’une série de fonctions. Ensuite, il s’agit simplement de vérifier ces conditions une à une dans le cas à traiter.

On notera que la série de fonctions à considérer ici n’est pas une série de puissances. Il n’est donc pas correct d’utiliser les résultats particuliers relatifs à ce type de séries de fonctions.

À noter également, l’une des conditions suffisantes de dérivabilité terme à terme est la convergence de la série en une valeur x_0 de l’intervalle (la valeur $x_0 = 0$ étant ici la plus simple). Il n’est donc pas nécessaire de prouver la convergence de la série en tout réel.

De trop nombreuses copies témoignent d'une confusion entre C_1 et C_0. On désigne par C_1 l'ensemble des fonctions continûment dérivables, c'est-à-dire continues, dérivables et dont la dérivée première est elle-même continue. La notation C_0 fait quant à elle référence à l'ensemble des fonctions continues.

Question II

i.
- Lorsqu'on étudie la convergence d'une série de fonctions f_k, il convient d'examiner la convergence simple – pour déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série définit une fonction – et la convergence uniforme – afin de pouvoir préciser les propriétés des fonctions f_k dont hérite la limite de la série de fonctions –.
  La convergence simple peut aussi être précisée en indiquant si la série converge en module, *i.e.* si la série converge absolument.
- Rappelons qu'une série de puissances converge uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence (ici, $\mathtt{I} =]-1,1[$). En général, on ne peut pas affirmer qu'une série de puissances converge uniformément sur son intervalle de convergence. Ici, puisque la série converge en $x = \pm 1$, la convergence uniforme est cependant assurée sur $[-1,1]$ (et donc également sur $\mathtt{I}$).
- Les notations "$\sim$"et "$=$" ne sont pas équivalentes. Il faut veiller à les utiliser correctement. Pour caractériser le comportement asymptotique du terme général d'une série, on pourra par exemple écrire
  $$\frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad (k \to \infty)$$
  en ayant soin d'indiquer que ce comportement est valable au voisinage de l'infini. Par contre, l'écriture
  $$\frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}$$
  est incomplète car elle n'indique pas dans quel voisinage les deux membres sont comparés l'un à l'autre. L'expression
  $$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2}, \quad (k \to \infty)$$
  est aussi incorrecte car il n'existe pas de valeur de k pour lesquelles les deux membres sont égaux.
- Lors de l'étude de la convergence de la série, il ne faut pas perdre de vue que le critère du quotient (ou de la racine) s'applique à la série des modules. Dans $\mathbb{R}$, le module équivaut à la valeur absolue. Dans l'exercice considéré ici, le terme général de la série est
  $$u_k = \frac{x^k}{k(1-k)}$$
  Le facteur $(1-k)$ étant strictement négatif pour tout $k \geq 2$, le module du terme général est
  $$|u_k| = \frac{|x|^k}{k(k-1)}$$
- Dans cet exercice, le critère du quotient ne permet pas de conclure quant à la convergence de la série pour $x = \pm 1$. Pour pouvoir progresser, le critère en k^α se prête bien. Mais il est important de noter que ce critère, lui aussi, ne peut être appliqué qu'aux séries à termes positifs. Vu le caractère négatif du facteur $(1-k), \forall k \geq 2$, on étudie donc la convergence de la série opposée (ou des modules).

ii. Rappelons que l'intervalle de convergence d'une série de puissances est, par définition, le plus grand **ouvert** `I` sur lequel la série converge (absolument). Même si la série converge en une extrémité de `I`, ce point n'appartient pas à l'intervalle de convergence. Il ne faut donc pas confondre l'intervalle de convergence ($\mathtt{I} =]-1,1[$ dans cet exercice) et le domaine sur lequel la série converge (ici $[-1,1]$). Certains résultats n'ont été démontrés en toute généralité que sur l'intervalle de convergence. D'autres s'appliquent à l'ensemble sur lequel la série converge. En particulier, toute série de fonctions définit une fonction sur son domaine de convergence, c'est-à-dire en tout x où elle converge.

iii. • Ce point commence par le calcul de la dérivée de la série. Il est important de justifier le fait que la série est dérivable terme à terme (voir la solution type).
• Lors du calcul des primitives, il faut penser à faire apparaître les constantes de primitivation et les déterminer ensuite en utilisant les conditions initiales données. Même si ce calcul conduit à des constantes nulles, il est important que le raisonnement soit apparent.

Question III

i. Outre l'importance d'étudier les convergences simple et uniforme de la série (voir remarque de la question II), il n'est pas correct de qualifier la série d'alternée. En effet, il faut tenir compte de la présence du facteur x^k. Par exemple, lorsque x est strictement négatif, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

est à termes positifs.

ii. Même remarque qu'à la question II.

iii. • Lors du calcul de la dérivée terme à terme de la série de puissances, la première écriture

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!\,k}{(2k)!} x^{k-1} \tag{$\heartsuit$}$$

pourrait laisser croire à la présence d'une singularité en $x = 0$. En effet, lorsque $k = 0$, cette écriture fait apparaître un terme en x^{-1} qui n'est pas défini en $x = 0$.
L'expression ($\heartsuit$) constitue un abus d'écriture assez habituel. La singularité en x^{-1} peut être écartée en remarquant que ce terme est multiplié par un facteur qui est nul pour $k = 0$. Ceci laisse néanmoins une certaine ambiguïté qui peut être levée en explicitant les premiers termes de la série

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{24}x^2 - \frac{6}{720}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

et en dérivant terme à terme,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - \frac{1}{2} + \frac{2}{24}2x - \frac{6}{720}3x^2 + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!\,k}{(2k)!} x^{k-1} \end{aligned}$$

La série des dérivées commence donc effectivement en $k = 1$. C'est de cette façon que l'expression ($\heartsuit$) doit être interprétée.

- Afin de ne pas se perdre dans les manipulations permettant d'écrire sous forme d'une série unique la combinaison des dérivées apparaissant dans l'équation différentielle, il convient de poursuivre les objectifs suivants :
  - Les différentes séries à combiner doivent faire apparaître la même puissance de la variable, ici x^k. Au besoin, l'indice (muet) de la série peut être modifié (par exemple $k \to k-1$).
  - Les différentes séries à combiner doivent débuter à la même de valeur de l'indice. Si ce n'est pas le cas, on extrait le(s) premier(s) terme(s) des séries. Par exemple,

$$\begin{aligned}\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k &= \left[\alpha (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k\right]_{k=0} + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k \\ &= \alpha + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!} x^k\end{aligned}$$

iv. La valeur de $f(1)$ s'exprime au moyen d'une série numérique alternée. Pour justifier la majoration de l'erreur, il convient de citer les résultats relatifs aux séries alternées en vérifiant les hypothèses correspondantes. La convergence absolue de la série ne suffit pas. Il faut vérifier que le module du terme général tend monotonement vers 0 pour que l'erreur commise en approchant la série alternée par une de ses sommes partielles puisse être majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé.