LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2019

ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures et demie.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du ***19 mars****.*

- ***Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre nom en MAJUSCULES suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

On considère la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^\beta}{\operatorname{th}(1/k)}$$

i. Montrez que

$$\operatorname{th}\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}, \qquad (k \to +\infty)$$

ii. Étudiez la convergence de la série en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.
On donne

$$\left(1+\frac{1}{k}\right) \operatorname{th}\frac{1}{k+1} > \operatorname{th}\frac{1}{k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Question II

La fonction de Bessel du premier type d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est définie par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

i. Étudiez la convergence de la série. La convergence est-elle uniforme ?
ii. Déterminez le domaine de définition de J_n.
iii. Étudiez les propriétés de continuité et de dérivabilité de J_n.
iv. Montrez, en justifiant, que

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = \alpha x^{-n} J_{n+1}(x)$$

où α désigne une constante réelle à déterminer.

Question III

On considère la suite de fonctions $\{f_k(x)\}$ où $f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}$.

i. Pour quelles valeurs de x cette suite converge-t-elle ?
ii. Montrez que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.
iii. Montrez que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.

SOLUTION TYPE

Question I

i. De

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \sim x, \quad (x \to 0)$$

on déduit que

$$\operatorname{th} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}, \quad (k \to +\infty)$$

Il est aussi possible de justifier le comportement asymptotique donné en calculant

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\operatorname{th}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{-1}{k^2 \operatorname{ch}^2 \frac{1}{k}}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(0)} = 1$$

Total i. : 2 pts

ii. • Le développement asymptotique établi permet d'écrire

$$a_k = (-1)^k \frac{k^\beta}{\operatorname{th}(1/k)} \sim (-1)^k k^{1+\beta}, \quad (k \to +\infty)$$

de sorte que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (-1)^k k^{1+\beta} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta < -1$$

i.e. le terme général de la série ne tend vers zéro que si $\beta < -1$. Cette condition étant nécessaire pour la convergence, on en déduit que la série diverge si $\beta \geq -1$.

Divergence justifiée si $\beta \geq -1$: 2 pts

• La convergence absolue de la série peut être étudiée en considérant

$$|a_k| = \frac{k^\beta}{\operatorname{th}\frac{1}{k}} \sim k^{1+\beta}, \quad (k \to +\infty)$$

Par le critère en k^α, ce comportement assure la convergence de la série des $|a_k|$ pour $1+\beta < -1$ et sa divergence pour $1+\beta \geq -1$. Dès lors, la série converge absolument uniquement pour les valeurs de $\beta < -2$.

Convergence absolue justifiée si $\beta < -2$: 2 pts

• Il reste à examiner si la série est semi-convergente quand $\beta \in [-2,-1[$. Puisque la série est alternée, ce sera le cas si la décroissance vers zéro de

Série alternée : 1 pt

$$v_k = \frac{k^\beta}{\operatorname{th}\frac{1}{k}}$$

établie ci-dessus dans le cas $\beta < -1$ est monotone, c'est-à-dire s'il existe un entier N à partir duquel

Semi-convergence justifiée si $\beta \in [-2,-1[$: 2 pts

$$v_{k+1} < v_k \qquad \text{soit} \qquad \frac{(k+1)^\beta}{\operatorname{th}\frac{1}{k+1}} < \frac{k^\beta}{\operatorname{th}\frac{1}{k}}$$

Cette condition peut être écrite sous la forme

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\beta} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\beta} < \frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)}{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{k}\right)}$$

ou encore

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\beta} > \frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)}$$

Cette condition est vérifiée pour tout $N \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $\beta \in [-2,-1[$ puisque

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\beta} > \left(1+\frac{1}{k}\right) \quad \forall \beta < -1 \qquad \text{et} \qquad \left(1+\frac{1}{k}\right) > \frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Dès lors, la série est semi-convergente pour $\beta \in [-2,-1[$.

Conclusions :
- la série converge absolument si $\beta < -2$;
- la série est semi-convergente si $\beta \in [-2,-1[$;
- la série diverge si $\beta \geq -1$.

Conclusion cohérente avec les résultats obtenus : 1 pt
Total ii. : 8 pts

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. Appliquons le critère du quotient à la série des modules. On a

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^{2(k+1)+n}}{|x|^{2k+n}} \frac{k!(n+k)!\,2^{2k+n}}{(k+1)!(n+(k+1))!\,2^{2(k+1)+n}} \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{x^2}{4(k+1)(n+k+1)} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La série converge donc absolument sur $\mathbb{R}$ qui constitue dès lors son intervalle de convergence.
En tant que série de puissances, cette série converge uniformément sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Application correcte d'un critère à la série des modules : 2 pts
Conclusion sur la convergence absolue : 2 pts (Inutile de mentionner `I`*).*
Conclusion sur la convergence uniforme : 2 pts
Total i. : 6 pts

ii. La série définit une fonction en tout point où elle converge, c'est-à-dire ici sur $\mathbb{R}$.

Total ii. : 2 pts, dont 1 pt pour la cohérence avec les résultats du points i.

iii. En tant que série de puissances, elle est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Total iii. : 2 pts, dont 1 pt pour la justification.

iv. On a

$$x^{-n}J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{1}{2^{2k+n}}x^{2k} = \frac{1}{n!2^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{1}{2^{2k+n}}x^{2k}$$

Expression de la fonction à dériver : 1 pt

Toute série de puissances étant dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence, on a

Justification de la dérivation terme à terme : 1 pt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{2k}{2^{2k+n}}x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n+k)!}\frac{1}{2^{2k+n-1}}x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(n+k+1)!}\frac{1}{2^{2(k+1)+n-1}}x^{2(k+1)-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1+k)!}\frac{1}{2^{2k+n+1}}x^{2k+1} \\
&= -x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1+k)!}\frac{1}{2^{2k+n+1}}x^{2k+n+1} = -x^{-n}J_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Développements : 2 pts

Cette expression correspond à la formule annoncée avec $\alpha = -1$.

Valeur de α : 1 pt
Total iv. : 5 pts
TOTAL QII : 15 PTS

Question III

i. Étudions la convergence simple de la suite de fonctions.
D'une part, on observe que $f_k(0) = 0$.
D'autre part, pour tout $x \neq 0$, on a

Valeur en $x = 0$: 1 pt
Limites correctes : 2 pts

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim_{k\to+\infty} kx\,\mathrm{e}^{-kx} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dès lors, la suite $\{f_k(x)\}$ converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ et diverge pour $x < 0$.

Conclusion : 1 pt
Total i. : 4 pts

ii. Pour examiner la convergence uniforme de la suite, recherchons le maximum (en valeur absolue) de l'écart entre f_k et la fonction limite f sur $[0, +\infty[$, *i.e.* le maximum de

$$|f_k(x) - f(x)| = |f_k(x) - 0| = f_k(x)$$

où on a tenu compte du fait que les fonctions f_k sont positives sur $[0, +\infty[$. Puisque

Convergence pas uniforme sur $[0, +\infty[$: 4 pts dont 3 pts pour la justification.
La compréhension intuitive du concept de convergence uniforme, "simultanément pour tous les x", doit être valorisée par 1 pt.

$$f_k'(x) = k(1-kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$$

les variations de f_k sont décrites par

x	0		$1/k$	
f_k'	$+$	$+$	0	$-$
$f_k(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	Max $= \mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$

On en déduit que la différence $|f_k(x) - f(x)|$ ne peut être rendue arbitrairement petite simultanément pour toutes les valeurs de $x \in [0, +\infty[$ puisque, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe un point de $[0, +\infty[$ en lequel la différence est égale à e^{-1}. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Total ii. : 4 pts

iii. La convergence est néanmoins uniforme sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$ quel que soit $a > 0$. On peut en effet montrer que l'écart $|f_k(x) - f(x)|$ peut être rendu arbitrairement petit simultanément pour tout $x \in [a,+\infty[$ en considérant des k suffisamment grands.

Pour ce faire, on note tout d'abord que, pour tout $k > 1/a$, $f_k' < 0$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Dès lors, le maximum de la différence $|f_k - f|$ sur $[a,+\infty[$ est réalisé en $x = a$, *i.e.*

$$\max_{x\in[a,+\infty[} |f_k(x) - f(x)| = f_k(a) = ka\,\mathrm{e}^{-ka}$$

Or, par définition de la limite,

Convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ quel que soit $a > 0$ correctement justifiée : 2 pts

$$\lim_{k\to\infty} ka\,\mathrm{e}^{-ka} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall k \geq N) : |ka\,\mathrm{e}^{-ka}| \leq \varepsilon$$

Il en résulte que la différence $|f_k - f|$ peut être majorée par ε simultanément pour toutes les valeurs de $x \in [a,+\infty[$ en considérant $k > \max(N, 1/a)$. La convergence est donc uniforme sur $[a,+\infty[$.

Total iii. : 2 pts

TOTAL QIII : 10 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

Les notations "$\sim$" et "$=$" ne sont pas équivalentes. Il faut veiller à les utiliser correctement. On pourra par exemple écrire

$$x^2 + x \sim x^2, \ (x \to +\infty)$$

mais pas

$$x^2 + x \sim x^2 \quad \text{sans précision du voisinage considéré}$$

ni

$$x^2 + x = x^2, \ (x \to +\infty)$$

i. Cette question pouvait être résolue de différentes façons. Deux d'entre elles sont reprises dans la solution type. La première consiste à utiliser les développements connus de $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ au voisinage de $x = 0$ pour établir celui de $\operatorname{th} 1/k$ au voisinage de l'infini. La seconde se base sur le fait que deux fonctions dont la limite du quotient vaut 1 dans un voisinage donné y sont asymptotiques.

   Le raisonnement ne peut par contre s'appuyer sur la proposition qui voudrait que deux fonctions sont asymptotiques au voisinage de l'infini si elles ont la même limite. Ceci est faux, sauf si cette limite est finie et diffère de zéro. Par exemple, les fonctions $1/x$ et $1/x^2$ sont telles que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

   mais ne sont pas asymptotiques l'une à l'autre puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/x^2} = +\infty \neq 1$$

ii. Le comportement asymptotique donné au point i. devait bien sûr être utilisé dans la deuxième partie de la question. Il permettait d'obtenir le comportement asymptotique du terme général de la série pour $k \to +\infty$. Il est par contre faux de remplacer le terme général par son comportement asymptotique dans la série. Le comportement asymptotique n'est valable que pour les très grandes valeurs de k.

   Il est important de bien structurer sa réponse.

   - Dans un problème présentant un paramètre, la vérification de la condition nécessaire de convergence permet souvent d'identifier une large plage de valeurs du paramètre pour lesquelles la série diverge. Dans cet exercice, l'utilisation du comportement asymptotique établi au point i. rendait le calcul de la limite à calculer très aisé.
   - C'est ensuite la convergence absolue de la série qui doit être étudiée. Le comportement asymptotique du terme général (pris en valeur absolue) permettait directement d'identifier, en vertu du critère en k^α, la plage de convergence absolue et celle de divergence de la série des modules.
   - La semi-convergence de la série doit enfin être envisagée là où la série des modules diverge alors que la condition nécessaire de convergence est vérifiée.
   - Tout exercice impliquant une discussion en fonction d'un paramètre devrait se terminer par une conclusion présentant la synthèse des résultats obtenus.

Question II

i. La convergence uniforme ne se déduit directement de la convergence absolue que parce que la série étudiée est une série de puissances. Pour justifier cette conclusion, il faut donc impérativement rappeler que la série est une série de puissances. De plus, la convergence uniforme n'est pas acquise sur l'intervalle de convergence de la série mais bien sur tout intervalle fermé borné de celui-ci.

ii. -

iii. La conclusion sur les propriétés de continuité et de dérivabilité doit être justifiée par le fait que la série est une série de puissances pour lesquelles ce résultat a été établi. Il ne faut pas s'arrêter à la continuité et à la dérivabilité. C'est l'indéfinie continue dérivabilité qui est assurée pour ces séries.

iv. • La dérivation terme à terme doit être justifiée par le fait que la série est une série de puissances.
• Quand il est nécessaire de changer l'indice sommatoire dans une série afin de faire apparaître une exposant donné, par exemple remplacer k par $k+1$, ce sont tous les k apparaissant dans l'expression du terme général qui doivent être modifiés de la sorte. On a par exemple

$$2k-1 \to 2(k+1)-1 = 2k+1 \quad \text{et pas} \quad 2k-1 \to 2k$$

Il faut aussi modifier l'indice sommatoire (dans le sens contraire) afin de garder les mêmes termes dans la série.
Pour rendre plus explicite le changement d'indice, on peut passer par un indice intermédiaire en écrivant par exemple

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n+k)!} \frac{1}{2^{2k+n-1}} x^{2k-1} \\
&= \sum_{\ell+1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1-1)!(n+\ell+1)!} \frac{1}{2^{2(\ell+1)+n-1}} x^{2(\ell+1)-1} \qquad \text{posant } k=\ell+1 \\
&= -\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!(n+\ell+1)!} \frac{1}{2^{2\ell+n+1}} x^{2\ell+1} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!(n+1+k)!} \frac{1}{2^{2k+n+1}} x^{2k+1} \qquad \text{en réutilisant l'indice } k \text{ initial.}
\end{aligned}$$

• Avant de dériver terme à terme une série de puissances, il faut toujours la réécrire en sortant de la série l'éventuel terme indépendant dont la dérivée est nulle mais qui, s'il était laissé dans la série, donnerait un terme avec un exposant négatif.
• Le paramètre α à déterminer était une constante réelle qui ne pouvait donc dépendre ni de k, ni de x.

Question II

Il était demandé d'étudier la convergence d'une **suite** de fonctions, pas d'une **série** de fonctions. Les méthodes et critères à utiliser sont donc différents. En particulier, l'étude de la convergence simple des suites ne peut être menée en utilisant les critères du quotient, de la racine, de comparaison ou en k^{α}. Par ailleurs, le critère de Weierstrass pour la convergence uniforme n'est pas non plus d'application pour les suites de fonctions.

i. L'étude de la convergence simple d'une suite de fonctions $f_k(x)$ revient simplement à déterminer les x pour lesquels $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = a \in \mathbb{R}$.

ii. • Pour justifier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$, il faut montrer que l'écart $|f_k(x) - f(x)|$ entre $f_k(x)$ et sa limite peut être rendu arbitrairement petit simultanément $\forall x \in [0,+\infty[$. Ce n'était pas possible ici puisque, quel que soit k, cet écart prend la valeur maximale e^{-1} en un point de cet intervalle.

• Le fait que $|f_k(x) - f(x)|$ soit égal à 0 en x=0 quel que soit k ne pose pas de problème pour la convergence uniforme. Ce n'est pas la raison pour laquelle la suite ne converge pas uniformément sur [0,+∞[.

iii. • La clé était ici de montrer que la maximum de $|f_k(x) - f(x)|$ sur [a,+∞[se trouvait en $x = a$ et valait $ka\mathrm{e}^{-ka}$ qui pouvait être rendu arbitrairement petit en prenant k suffisamment grand, contrairement au maximum e^{-1} du point ii.

• La convergence simple de la suite de fonctions sur $[0,+\infty[$ n'implique pas sa convergence uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[0,+\infty[$. Ceci est un résultat relatif aux **séries** de **puissances**. Par ailleurs, on notera que l'intervalle $[a,+\infty[$ n'est même pas borné.