Prof. Éric J.M.DELHEZ

Avril 2022

Analyse Mathématique 2
Évaluation formative

Question I

Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^\beta}\, d\theta$$

en discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Question II

Inversez l'ordre d'intégration, en justifiant, et évaluez

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy$$

Question III

On considère le domaine $\mathtt{E}$ décrit par

$$\mathtt{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ x+y \geq 2a,\ 2y+x \leq 6a,\ y^2+z^2 \leq 4a^2 \right\}$$

où a est une constante réelle strictement positive qui a les dimensions d'une longueur.

i. Esquissez $\mathtt{E}$ en expliquant votre construction.
Suggestion : Identifiez $\mathtt{E}_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y \geq 2a,\ 2y+x \leq 6a \right\}$ *et*

$$\mathtt{E}_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y^2+z^2 \leq 4a^2 \right\}$$

et considérez $\mathtt{E}$ *comme l'intersection de* $\mathtt{E}_1$ *et* $\mathtt{E}_2$.

ii. Calculez le volume de $\mathtt{E}$.

Question I

Soit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^\beta}\, d\theta$$

Nous constatons d'abord que, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$,

Continuité de l'intégrande sur $]0,\pi/2[$ $\forall\beta$ *: 1 pt*

$$\frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^\beta} \in C_0(]0,\pi/2[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]0,\pi/2[$. Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $\pi/2$.

Intégrabilité au voisinage de 0 *pour tout* β *: 3 pts, dont 2 pts pour la justification.*
Si le voisinage de 0 *est traité après celui de* $\pi/2$*, il suffit que l'intégrabilité au* $V(0)$ *soit énoncée et justifiée pour* $\beta <\ 1$.

- Au voisinage de 0, $\cos\theta \sim 1$, de sorte que

$$\frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^\beta} \sim \ln\theta = o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right), \quad (\theta \to 0^+)$$

  ce qui garantit l'intégrabilité dans le voisinage de $\theta = 0$ quelle que soit la valeur de β.

- Au voisinage de $\pi/2$, en exploitant le comportement asymptotique $\sin x \sim x$, $(x \to 0)$, on peut écrire

$$\frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^\beta} = \frac{\ln\theta}{\sin^\beta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \sim \ln(\pi/2)\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^\beta}, \quad (\theta \to \frac{\pi}{2}^-)$$

  Dès lors, la fonction n'est pas intégrable dans le voisinage de $\pi/2$ si $\beta \geq 1$ mais est intégrable pour tout $\beta < 1$.

Intégrabilité au voisinage de $\pi/2$ *si* $\beta < 1$ *: 1 pt*
Non-intégrabilité au voisinage de $\pi/2$ *si* $\beta \geq 1$ *: 1 pt*
Justification de ces résultats : 1 pt

En conclusion,

Synthèse des résultats : 1 pt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^\beta}\, d\theta \text{ existe si et seulement si } \beta < 1.$$

TOTAL QI : 8 PTS.

Question II

Écriture de l'intégrale double avec identification de E *(mathématique ou graphique) : 2 pts.*

L'expression

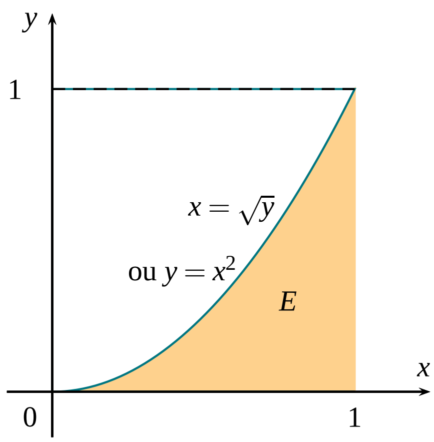
$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2y}{(4x^2+y^2)^2} dx\right) dy$$

ne peut raisonnablement être calculée telle quelle mais peut être considérée comme la réduction de l'intégrale double

Justification de l'équivalence par Fubini : 1 pt.

$$I = \iint_E \frac{x^2y}{(4x^2+y^2)^2} dx\,dy \quad \text{où} \quad \mathtt{E} = \{(x,y) : 0 < y < 1, \sqrt{y} < x < 1\}$$

si celle-ci existe (Théorème de Fubini).



L'intégrande n'étant pas continu sur $\overline{\mathtt{E}}$ puisque non défini en $(0,0)$, il faut faire appel au critère de Tonelli pour justifier l'intégrabilité. Par le critère de Tonelli, cette existence est assurée si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a un sens. Puisque l'intégrande est positif sur $\mathtt{E}$, l'intégrabilité pourra donc être vérifiée par l'existence des intégrales successives conduisant au calcul de I.

Appel à Tonelli pour justifier l'intégrabilité dans $\mathbb{R}^2$: 2 pts, dont 1 pt pour le signe positif de l'intégrande.

En inversant l'ordre d'intégration par rapport à celui proposé dans l'énoncé (pour faciliter le calcul des intégrales), on obtient successivement

Renversement de l'ordre d'intégration : 2 pts.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-x^2}{2(4x^2+y^2)} \right]_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2(4+x^2)} \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{8} - \frac{1}{8\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]} dx \\
&= \left[\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Calcul de la première intégrale : 2 pts.

Calcul de la deuxième intégrale : 2 pts.

Résultat correct : 1 pt

L'existence des intégrales simples successives est aisément justifiée. D'une part, pour $x \neq 0$, donc pour presque tout x fixé dans $[0,1]$, la fonction apparaissant dans la première intégrale est continue par rapport à y sur le compact $[0,x^2]$, d'où

$$
\frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} \in \mathbb{L}_1(]0,x^2[)
$$

Justfication de la première intégrale : 2 pts, dont 1 pt pour le "pour presque tout x"

D'autre part,

$$
\frac{1}{8} - \frac{1}{2(4+x^2)} \in C_0([0,1])
$$

ce qui assure son intégrabilité sur $]0,1[$.

Justfication de la deuxième intégrale : 1 pt

TOTAL QII : 15 PTS.

Question III

i. Soit

$$\mathtt{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ x+y \geq 2a,\ 2y+x \leq 6a,\ y^2+z^2 \leq 4a^2 \right\}$$

Comme suggéré, le volume $\mathtt{E}$ peut être décrit comme l'intersection de

$$\mathtt{E}_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y \geq 2a,\ 2y+x \leq 6a \right\}$$

et

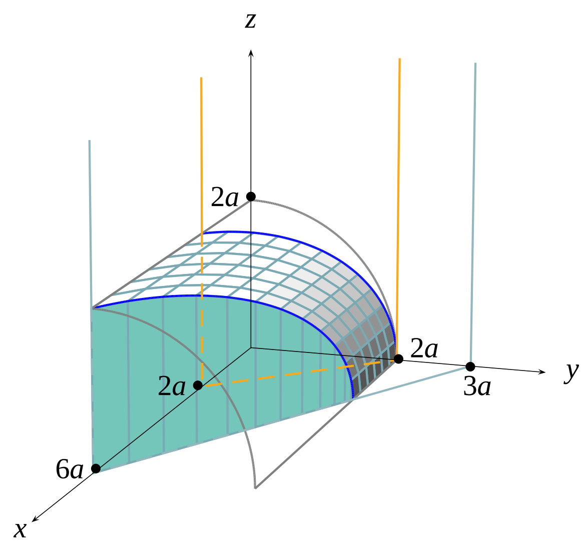
$$\mathtt{E}_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y^2+z^2 \leq 4a^2 \right\}$$

qui représentent respectivement la partie du premier octant ($x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$) comprise entre les plans parallèles à OZ d'équations $x+y = 2a$ et $2y+x = 6a$ (équations linéaires avec absence de la variable z) et la partie du cylindre circulaire droit d'axe OX (variable x absente de l'équation) et de rayon $2a$ située dans le premier octant.

Premier octant, annoncé ou mis en oeuvre : 1 pt

Identification de plans parallèles à OZ : 1 pt

Identification du cylindre : 1 pt



Représentation graphique avec valeurs utiles des coordonnées x, y et z utiles : 2 pts

Total i. : 5 pts

ii. Le volume du domaine $\mathtt{E}$ s'exprime par

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

Expression intégrale du volume : 1 pt

L'intégrale existe puisque l'intégrande ($= 1$) est continu sur le compact $\mathtt{E}$. Elle peut donc être calculée dans n'importe quel ordre d'intégration partielle, en vertu du théorème de Fubini.

Existence de l'intégrale (justification basée sur le bon sens -domaine borné- aussi acceptée) : 1 pt

La surface latérale du domaine étant une portion de cylindre, il est intéressant d'en décrire la base (le quart de disque de rayon 2a) et de faire varier la coordonnée longitudinale x entre les deux plans inclinés, soit

- y varie de 0 à $2a$;
- pour y fixé, z varie de 0 à $\sqrt{4a^2 - y^2}$;
- et, pour y et z fixés, x varie de $2a - y$ à $6a - 2y$.

Réduction de l'intégrale : 3 pts

On a donc *Calculs : 4 pts*

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2a} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} dz \int_{2a-y}^{6a-2y} dx \\
&= \int_0^{2a} \sqrt{4a^2-y^2}\,[6a-2y-(2a-y)]dy = \int_0^{2a} \sqrt{4a^2-y^2}\,(4a-y)dy \\
&= 4a \int_0^{2a} \sqrt{4a^2-y^2}\,dy - \int_0^{2a} y\sqrt{4a^2-y^2}\,dy
\end{aligned}
$$

La première intégrale se calcule en effectuant le changement de variable $y = 2a\sin t$, soit $dy = 2a\cos t\,dt$ et $[0,2a] \to [0,\pi/2]$. On a donc,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2a} \sqrt{4a^2-y^2}\,dy &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2-4a^2\sin^2 t} \quad 2a\cos t\;dt \\
&= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\;dt = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= 2a^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi a^2
\end{aligned}
$$

Le calcul de la deuxième intégrale s'effectue sans problème. On a

$$
\int_0^{2a} y\sqrt{4a^2-y^2}\,dy = \left[(-\frac{1}{2})\frac{2}{3}\left(4a^2-y^2\right)^{3/2}\right]_0^{2a} = \frac{8a^3}{3}
$$

de sorte que

$$
V = a^3\left(4\pi - \frac{8}{3}\right)
$$

Valeur finale : 1 pt

Le résultat obtenu est bien positif et a les dimensions d'un volume puisque $[V] = [a^3] = L^3$.

Total ii. : 10 pts

TOTAL QIII : 15 PTS.

Remarquons qu'il était aussi possible de réduire l'intégrale triple en commençant par décrire la projection du domaine dans le plan $z = 0$ puis en "montant jusqu'au cylindre". On a alors

- y varie de 0 à $2a$;
- pour y fixé, x varie de de $2a-y$ à $6a-2y$;
- et, pour y et x fixés, z varie de 0 à $\sqrt{4a^2-y^2}$.

Soit

$$
V = \int_0^{2a} dy \int_{2a-y}^{6a-2y} dx \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} dz
$$

qui conduit exactement aux calculs réalisés plus haut puisque les bornes d'intégration ne dépendent que de y.

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- La justification de l'existence d'une intégrale dans $\mathbb{R}$ commence toujours par l'étude de la continuité de l'intégrande sur le domaine d'intégration. Dans le meilleur des cas, on peut justifier l'intégrabilité par le fait qu'on intègre une fonction continue sur un compact. Sinon, la démarche permet de justifier l'intégrabilité sur tout compact du domaine d'intégration où l'intégrande est continu. Il reste ensuite à vérifier l'intégrabilité au voisinage des points où l'intégrande n'est pas continu.
- Quand l'intégrande se comporte comme une puissance au voisinage des points où l'intégrabilité doit être étudiée spécifiquement, on peut exploiter efficacement ce résultat pour conclure en utilisant les critères de la section 5.7.3. Il importe donc de chercher à identifier un comportement asymptotique de ce type chaque fois que cela est possible.

  Ici, quelle que soit la valeur de β au voisinage de $\pi/2$ on a
  $$\frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^{\beta}} \sim \ln(\pi/2)\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{\beta}}, \quad (\theta \to \frac{\pi}{2}^{-}),$$
  et on peut donc identifier les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale existe et celles pour lesquelles l'intégrale n'existe pas.
- On veillera à utiliser les bonnes notations. En particulier, un comportment asymptotique doit être écrit avec le symbole $\sim$ et pas $=$. Il faut aussi toujours préciser dans quel voisinage ce comportement est valable.
- La fonction x^a ($a \in \mathbb{R}$) n'est pas définie si $x \leq 0$. Elle possède cependant un prolongement continu en $x = 0$ si $a \geq 0$ puisque
  $$\lim_{x\to 0} x^a = 0 \text{ si } a > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x^0 = 1$$
  Ici, l'intégrande possède un prolongement continu en $\theta = \pi/2$ pour $\beta \leq 0$ puisque
  $$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^{\beta}} = 0 \text{ si } \beta < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln\theta}{(\cos\theta)^{0}} = \ln\frac{\pi}{2}$$
  Ceci permet de justifier l'intégrabilité (voir formule (5.64) des notes de cours 2021) au voisinage de $\pi/2$ pour toutes les valeurs de $\beta \leq 0$.

  Il n'est cependant pas nécessaire de traiter séparément le(s) cas $\beta \leq 0$ puisque l'analyse du comportement asymptotique telle qu'introduite dans le deuxième item permet de conclure quelle que soit la valeur de β.
- On se souviendra qu'une fonction peut être intégrable au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ alors que sa limite en ce point est infinie. Considérons par exemple $1/\sqrt{x}$ qui est intégrable au voisinage de 0. Par contre, une fonction qui a une limite infinie à l'infini ne sera jamais intégrable au voisinage de l'infini. Dans ce cas, on a en effet
  $$\frac{1}{x} = o\Big(f(x)\Big), \ (x \to \infty)$$

Question II

- Une condition suffisante pour pouvoir changer l'ordre de deux intégrales simples successives sans changer la valeur de l'expression est fournie par le théorème de Fubini : il suffit que l'intégrale double correspondante existe. Pour appliquer ce théorème, il convient donc de commencer par exprimer cette intégrale double, en identifiant correctement le domaine d'intégration $\mathtt{E}$.

  En pratique, l'existence d'une intégrale multidimensionnelle peut être justifiée de deux façons différentes.

  - ◇ La situation la plus simple est celle où on intègre une fonction continue sur un compact, c'est-à-dire un ensemble fermé et borné. Ceci assure en effet l'intégrabilité.

    Ici, le domaine $\mathtt{E}$ est un ouvert borné mais $f \notin C_0(\overline{\mathtt{E}})$ où $\overline{\mathtt{E}}$ désigne l'adhérence de $\mathtt{E}$, *i.e.* le compact formé de l'union de $\mathtt{E}$ et de sa frontière, car f n'est pas définie en $(0,0)$ (et ne peut être prolongée continûment en ce point).
  - ◇ L'autre approche pour justifier l'existence d'une intégrale double repose sur le critère de Tonelli. L'intégrale double existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui existe. Cette approche générale est la seule applicable ici.

  En général, le fait de pouvoir calculer l'intégrale dans un ordre d'intégration partielle et d'obtenir une valeur finie ne permet pas de justifier l'existence de l'intégrale double car le critère de Tonelli demande la justification des intégrales partielles successives du **module** de l'intégrande. Un résultat différent pourrait en effet être obtenu dans un autre ordre d'intégration partielle comme le montre l'exemple (5.26) des notes de cours 2021. Le fait que l'intégrande soit ici de signe constant constitue donc un élément important du raisonnement qui doit être mentionné explicitement.

- La représentation graphique du domaine est indispensable, non seulement pour voir s'il est borné mais aussi pour pouvoir réduire correctement l'intégrale double dans un autre ordre d'intégration que celui proposé. Pour organiser efficacement son raisonnement et les développements mathématiques, il convient d'identifier la frontière du domaine et de noter sur les axes les abscisses et ordonnées correspondant aux limites des différentes courbes constituant cette frontière.

- L'application du critère demande de justifier chacune des intégrales partielles successives pour presque toutes les valeurs des variables par rapport auxquelles l'intégration est réalisée ultérieurement. Il fallait donc ici procéder méthodiquement, en commençant par justifier l'existence de l'intégrale par rapport à y sur $[0,x^2]$ pour presque tout x dans $[0,1]$, ce qui permettait de ne pas considérer $x = 0$ et de garantir la continuité de l'intégrande par rapport à y sur $[0,x^2]$, puis justifier l'intégrale par rapport à x par la continuité de l'intégrande sur $[0,1]$.
- Les dérivées des fonctions transcendantes (voir annexe B) doivent être connues. Il est inadmissible à ce stade de ne pas pouvoir identifier que $1/1+x^2$ est la dérivée de $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Question III

i.
- Réaliser un dessin soigné, lisible et précis est la première étape de la plupart des exercices de calcul intégral à plusieurs dimensions.
- Le domaine se trouve dans le premier octant puisque $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. Les surfaces représentées doivent donc s'arrêter aux plans limitant le premier octant.
- Il est nécessaire de noter sur les axes cartésiens les valeurs des coordonnées correspondant aux intersections des surfaces délimitant le domaine avec ces axes.
- Quand on travaille en 3D, dans $\mathbb{R}^3$, chaque équation représente (normalement) une surface, même si une ou plusieurs des variables x, y et z sont absentes. En particulier, $y^2 + z^2 = 4a^2$ n'est pas un cercle mais un cylindre circulaire droit dont la génératrice est parallèle à OX.

ii.
- La première chose à faire dans ce genre de problème est de donner l'expression intégrale correspondant à la grandeur à évaluer.
- Il est ensuite nécessaire de vérifier l'existence de l'intégrale à calculer. Celle-ci peut être justifiée par la continuité de l'intégrande sur le domaine d'intégration si celui-ci a été défini comme un ensemble fermé et borné (avec $\leq$) ou sur l'adhérence de celui-ci, s'il a été défini comme un ensemble borné mais ouvert (avec une inégalité stricte).

  Notons que, dans le cas présent, le bon sens physique permet aussi de justifier simplement l'existence de l'intégrale puisque le volume représenté est fini.
- Pour la réduction de l'intégrale, deux approches équivalentes sont envisageables.

  La première, très classique quand on doit représenter un domaine situé à l'intérieur d'un cylindre, est de commencer par décrire la section du cylindre (le quart de disque ici) puis de faire varier la coordonnée longitudinale entre les deux surfaces délimitant le cylindre (les plans inclinés ici).

  La deuxième approche, tout aussi adaptée dans le cas présent, consistait à décrire la projection du domaine dans le plan $z = 0$ puis à faire varier la variable z entre la plan $z = 0$ et le cylindre.
- Quand un changement de variables est réalisé pour calculer une intégrale, il ne faut pas oublier de transformer les bornes d'intégration.
- Quand un énoncé est dimensionnellement correct, ce qui est bien le cas ici, la réponse finale doit avoir les dimensions attendues. Ici, on calcule un volume qui doit donc avoir les dimensions du cube d'une longueur. Par ailleurs, la réponse finale doit aussi être positive, vu son interprétation géométrique. Quand la réponse s'exprime au moyen d'une différence, il est utile de vérifier que le résultat est positif. Ces deux vérifications permettent de repérer facilement d'éventuelles erreurs de calcul et d'éviter de présenter un résultat qui n'a pas de sens.