Prof. Éric J.M.DELHEZ

Analyse Mathématique
Évaluation formative

Avril 2020

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

- ***Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.***
- ***Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.***
- ***N'utilisez pas de couleur pour mettre en évidence des éléments de vos réponses car vos copies seront imprimées en noir et blanc pour être corrigées.***
- ***Soumettez votre solution par e-mail à l'adresse mmm@uliege.be pour le mardi 21 avril à 10h. Votre copie doit impérativement être transmise au format pdf, en un seul fichier dont le nom est formé de votre nom et votre prénom (Nom_Prenom.pdf).***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Les intégrales suivantes existent-elles ? Justifiez vos réponses.

i. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\,dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2\ln x}\,dx$

iii. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

iv. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln x\,dx$

v. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

vi. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

Question II

Calculez en justifiant

$$\int_0^1 y\,dy \int_{y^2}^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

Question III

On considère le domaine $\mathtt{E}$ décrit par

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+z \leq 4a,\ x^2+4y^2 \leq 16a^2\right\}$$

où $a > 0$ désigne une constante.

i. Esquissez $\mathtt{E}$ en expliquant votre construction.

ii. Calculez le volume de $\mathtt{E}$.

SOLUTION TYPE

Question I

Continuité de tous les intégrands sur $]0,1/2]$: 3 pts

i. Soit
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} dx$$
On a
$$\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in C_0(]0,1/2])$$
Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au $V(0^+)$. On peut écrire
$$\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad (x \to 0^+)$$
de sorte que l'intégrale existe puisque l'intégrand se comporte "mieux" qu'une fonction intégrable.

Conclusion correctement justifiée (inutile de démontrer le comportement asymptotique par un calcul de limite) : 2 pts

ii. Soit
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2\ln x}\, dx$$
On a
$$\frac{1}{x^2\ln x} \in C_0(]0,1/2])$$
Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au $V(0^+)$. On peut écrire
$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right), \quad (x \to 0^+)$$
de sorte que l'intégrale n'existe pas puisque l'intégrand se comporte "moins bien" que la fonction $1/x$ qui n'est pas intégrable.

Conclusion correctement justifiée (inutile de démontrer le comportement asymptotique par un calcul de limite) : 2 pts

iii. Soit
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$
On a
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \in C_0(]0,1/2])$$
Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au $V(0^+)$. On peut écrire
$$\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right), \quad (x \to 0^+)$$
et donc
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right), \quad (x \to 0^+)$$
de sorte que l'intégrale existe puisque l'intégrand se comporte "mieux" qu'une fonction intégrable.

Conclusion correctement justifiée (inutile de démontrer le comportement asymptotique par un calcul de limite) : 2 pts

iv. Soit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \ln x \, dx$$

On a

$$x \ln x \in C_0(]0, 1/2])$$

Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au $V(0^+)$. On peut écrire

Conclusion correctement justifiée (inutile de démontrer le comportement asymptotique par un calcul de limite) : 2 pts

$$\ln x = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to 0^+)$$

et donc

$$x \ln x = o(1), \quad (x \to 0^+)$$

de sorte que l'intégrale existe puisque l'intégrand se comporte "mieux" qu'une fonction intégrable ($1 = 1/x^{\alpha}$ avec $\alpha = 0 < 1$).

v. Soit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} \, dx$$

On a

$$\frac{1}{x \ln x} \in C_0(]0, 1/2])$$

Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au $V(0^+)$. On peut écrire

$$\frac{1}{x \ln x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to 0^+)$$

ce qui ne permet pas de conclure puisque cela indique seulement que l'intégrand se comporte "mieux" qu'une fonction qui n'est pas intégrable. Par contre, il est possible de déterminer une primitive $F(x)$ de $1/(x \ln x)$ sur $]0, 1/2]$,

$$F(x) = \ln |\ln x|$$

telle que

Conclusion correctement justifiée : 2 pts

$$\lim_{x \to 0^+} \ln |\ln x| = +\infty$$

La limite pour $x \to 0^+$ n'étant pas finie, on en déduit que l'intégrale n'existe pas en vertu de la contraposée du théorème fondamental du calcul intégral.

vi. Soit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx$$

On a

$$\frac{1}{x \ln^2 x} \in C_0(]0, 1/2])$$

Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au $V(0^+)$. Comme ci-dessus, on peut écrire

Conclusion correctement justifiée : 2 pts

$$\frac{1}{x \ln^2 x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to 0^+)$$

ce qui ne nous apprend rien. Par contre, il est possible de déterminer une primitive $F(x)$ de $1/(x \ln^2 x)$ sur $]0, 1/2]$,

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x}$$

telle que

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\ln x} = 0$$

Cette limite étant finie et l'intégrand de signe constant au $V(0^+)$, on en déduit que l'intégrale existe en vertu des critères généraux d'intégrabilité.

TOTAL QI : 15 PTS

Question II

L'expression

$$\int_0^1 y\,dy \int_{y^2}^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

ne peut être calculée telle quelle puisqu'on ne connait pas de primitive de $(\sin x)/x$. Elle est cependant équivalente à

$$I = \iint_{\mathtt{E}} y\,\frac{\sin x}{x}\,dxdy$$

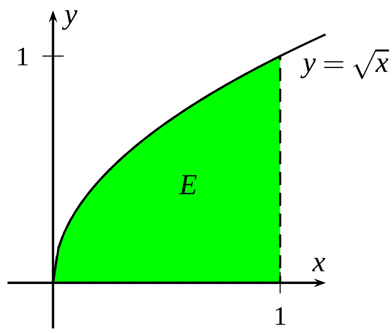
Passage par l'intégrale double : 1 pt

où (voir figure)

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y) : 0 < y < 1,\ y^2 < x < 1\right\}$$

si cette intégrale double existe.

Identification (mathématique ou graphique) du domaine : 2 pts



La fonction $(y\sin x)/x$ n'est pas continue sur $\bar{E}$, l'adhérence de E, puisqu'elle n'est pas définie au point $(0,0)$. L'intégrabilité pourra cependant être justifiée, en vertu du critère de Tonelli, si on trouve un ordre d'intégration partielle de $|(y\sin x)/x| = (y\sin x)/x$ qui existe.

Appel à Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale double : 1 pt

En inversant l'ordre d'intégration proposé dans l'énoncé pour ce calcul, on est conduit à évaluer

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y\frac{\sin x}{x}\,dy \qquad (\spadesuit)$$

Intégrale avec ordre inversé : 2 pts

L'intégrale

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{x}} y\,\frac{\sin x}{x}\,dy$$

Justification de l'existence de I_1 : 1 pt

est définie puisque l'intégrand $(y\sin x)/x$ est continu sur le compact $[0,\sqrt{x}]$ pour (presque) tout $x \in]0,1[$. Sa valeur est donnée par

Valeur de I_1 : 2 pts

$$I_1 = \frac{\sin x}{x}\,\frac{y^2}{2}\bigg]_0^{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{2}$$

En injectant cette valeur dans l'expression ($\spadesuit$), on est amené à considérer

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin x\,dx$$

L'intégrale I_2 est également définie en vertu de la continuité de l'intégrand $\sin x$ sur le compact $[0,1]$. Sa valeur est donnée par

$$I_2 = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\big(1-\cos 1\big)$$

Justification de l'existence de I_2 : 1 pts

Valeur de I_2 : 2 pts

TOTAL QII : 12 PTS

Dès lors

$$I = \int_0^1 y\,dy \int_{y^2}^1 \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\big(1-\cos 1\big)$$

Question III

i. Soit

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+z \leq 4a,\ x^2+4y^2 \leq 16a^2\right\}$$

Ce domaine est compris dans le premier octant. Il est limité par le plan parallèle à OY d'équation $x+z=4a$ (équation linéaire avec absence de la variable y) et se trouve du côté du plan qui contient l'origine O des axes.

Premier octant, annoncé ou mis en oeuvre : 1 pt

Plan parallèle à OY : 1 pt

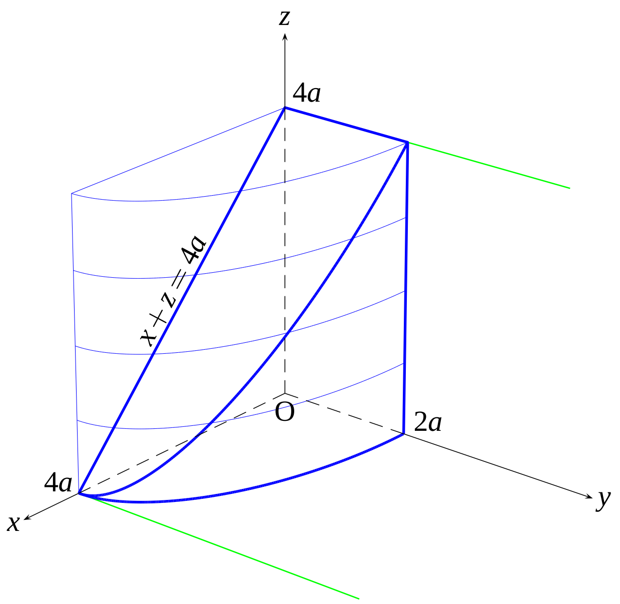
Il est également limité par la surface $x^2+4y^2=16a^2$. Il s'agit d'un cylindre de génératrice parallèle à OZ (vu l'absence de la variable z) et de section elliptique. En effet, l'intersection de tout plan $z = constante$ avec cette surface est une ellipse d'équation

Cylindre elliptique : 1 pt

$$x^2+4y^2 = 16a^2 \text{ ou encore, sous forme canonique, } \frac{x^2}{16a^2}+\frac{y^2}{4a^2} = 1$$

Le demi-axe de l'ellipse selon OX vaut $4a$ et le demi-axe selon OY vaut $2a$. Le domaine se trouve à l'intérieur de ce cylindre elliptique.

Représentation correcte : 2 pts



Total i. : 5 pts

ii. Le volume du solide s'exprime par

Expression intégrale du volume : 1 pt

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

L'intégrale existe puisque l'intégrand (= 1) est continu sur le compact E. Elle peut donc être calculée dans n'importe quel ordre d'intégration partielle, en vertu du théorème de Fubini.

Existence de l'intégrale (justification basée sur le bon sens -domaine borné- aussi acceptée) : 1 pt

Pour décrire le domaine E qui est une portion de cylindre, il est intéressant de commencer par décrire la base du cylindre puis de faire varier z jusqu'au plan, soit

- x varie de 0 à $4a$;
- pour x fixé, y varie de 0 à l'ellipse $\sqrt{4a^2-(x^2/4)}$;
- et, pour x et y fixés, z varie de 0 à $4a-x$.

Réduction de l'intégrale : 3 pts

On a donc

Calculs : 4 pts

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{4a} dx \int_0^{\sqrt{4a^2-\frac{x^2}{4}}} dy \int_0^{4a-x} dz \\ &= \int_0^{4a} (4a-x)\sqrt{4a^2-\frac{x^2}{4}}\, dx \\ &= \int_0^{4a} 4a\sqrt{4a^2-\frac{x^2}{4}}\, dx - \int_0^{4a} x\sqrt{4a^2-\frac{x^2}{4}}\, dx \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule en effectuant le changement de variable $x = 4a\sin t$, soit $dx = 4a\cos t\, dt$ et $[0,4a] \to [0,\pi/2]$. On a donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{4a} 4a\sqrt{4a^2-\frac{x^2}{4}}\, dx &= \int_0^{\pi/2} 4a\sqrt{4a^2-4a^2\sin^2 t} \quad 4a\cos t\, dt \\ &= 32a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 32a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\ &= 16a^3 \left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 8\pi a^3 \end{aligned}$$

Le calcul de la deuxième intégrale s'effectue sans problème. On a

$$\int_0^{4a} x\sqrt{4a^2-\frac{x^2}{4}}\, dx = \left[(-2)\frac{2}{3}\left(4a^2-\frac{x^2}{4}\right)^{3/2}\right]_0^{4a} = \frac{32\,a^3}{3}$$

de sorte que

$$V = \left(8\pi - \frac{32}{3}\right) a^3$$

Remarquons que le volume calculé est positif et possède les dimensions d'un volume puisque $[V] = [a^3] = L^3$.

Valeur finale : 1 pt

Total ii. : 10 pts

TOTAL QIII : 15 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

◇ Certains étudiants ont utilisé les critères d'intégrabilité et de non-intégrabilité de façon erronée. Rappelons ici les principes de base.

- Si une fonction se comporte "comme ou mieux" qu'une fonction intégrable, elle est intégrable. Par exemple,

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right),\ (x \to 0^+) \Rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ est intégrable au voisinage de } 0^+$$

- Si une fonction se comporte "comme ou moins bien" qu'une fonction non intégrable (et en particulier que la fonction $1/x$), elle n'est pas intégrable. Par exemple,

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2 \ln x}\right),\ (x \to 0^+) \Rightarrow \frac{1}{x^2 \ln x} \text{ n'est pas intégrable au voisinage de } 0^+$$

Par contre, les cas suivants ne nous apprennent rien.

- Si une fonction se comporte "mieux" qu'une fonction non intégrable, on ne peut rien conclure. Par exemple, les comportements

$$\frac{1}{x \ln x} = o\left(\frac{1}{x}\right),\ (x \to 0^+) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x \ln^2 x} = o\left(\frac{1}{x}\right),\ (x \to 0^+)$$

ne nous apprennent rien sur l'intégrabilité des fonctions $1/(x \ln x)$ et $1/(x \ln^2 x)$ dans le voisinage de 0^+. Les raisonnements basés sur les limites des primitives montrent par contre que la première fonction n'est pas intégrable dans le voisinage de 0^+ (voir v.) alors que la seconde l'est (voir vi.).

- Si une fonction se comporte "moins bien" qu'une fonction intégrable, on ne peut rien conclure. Par exemple, les comportements

$$\frac{1}{x^{1/4}} = o\left(\frac{1}{x}\right),\ (x \to 0^+) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{1/4}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ (x \to 0^+)$$

ne nous apprennent rien sur l'intégrabilité des fonctions $1/x$ et $1/(\sqrt{x})$ dans le voisinage de 0^+. Nous savons que $1/x$ n'est pas intégrable au voisinage de 0^+ tandis que $1/\sqrt{x}$ l'est.

◇ Une erreur également rencontrée concerne le concept de fonction négligeable.
Rappelons que

$$f = o(g) \quad \not\Rightarrow \quad \frac{1}{f} = o\left(\frac{1}{g}\right)$$

mais

$$f = o(g) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} = o\left(\frac{1}{f}\right)$$

◇ Finalement, pour montrer qu'une fonction *n'est pas intégrable* au voisinage de 0^+, il suffit de montrer qu'une primitive ne possède pas de limite finie (en vertu de la contraposée du théorème fondamental du calcul intégral).

Par contre, pour montrer qu'une fonction *est intégrable* au voisinage de 0^+, montrer qu'une primitive admet une limite finie n'est pas suffisant. Il faut de plus prouver que l'intégrand est de signe constant au $V(0^+)$ en vertu des critères généraux d'intégrabilité.

Question II

Le changement de l'ordre d'intégration comporte des aspects techniques aussi bien que des aspects théoriques. Les premiers ne peuvent être mis en œuvre en ignorant les seconds.

Ce n'est que parce que l'expression existe comme intégrale dans $\mathbb{R}^2$ que les ordres d'intégration partielle conduisent au même résultat (Th. de Fubini).

Pour établir l'existence de l'intégrale double, il suffit de trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a du sens (Critère de Tonelli).

Ici, puisque l'intégrand est positif sur le domaine d'intégration, l'étude de l'existence de l'intégrale et son évaluation en utilisant un ordre d'intégration approprié peuvent être menées en parallèle. Ce ne serait pas le cas si l'intégrand n'était pas de signe constant.

Question III

Pour autant que le problème soit bien posé initialement, il est toujours utile de vérifier que le résultat obtenu possède les dimensions attendues.

Dans la description du domaine $\mathtt{E}$, on observe que le paramètre a possède les dimensions d'une longueur dans les expressions

$$x + y \leq 4a, \qquad x^2 + 4y^2 \leq 16a^2$$

De façon cohérente, la mesure de $\mathtt{E}$ s'exprime sous la forme d'un multiple de a^3, ce qui représente bien un volume.

L'examen des dimensions du résultat et de son signe permet d'identifier aisément certaines erreurs de calcul. Par exemple, un expression du type

$$V = 8\pi - a^3$$

ne peut représenter un résultat plausible puisque les deux termes de la différence ne possèdent pas les dimensions attendues ("On ne peut soustraire des pommes et des poires.") et que le résultat diminue et devient négatif si a augmente, ce qui ne résiste pas à l'analyse de la géométrie du problème.