Prof. Éric J.M.DELHEZ

Avril 2018

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures et demie.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du ***24 avril****.*

- ***Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

i. Étudiez en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ l'existence de

$$I_\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x \, dx$$

ii. Calculez I_λ pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles l'intégrale existe.

Question II

Calculez en justifiant

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 x e^{y^2} \, dy \right) dx$$

Question III

i. Si $f \in L_1(]0,+\infty[)$, peut-on affirmer que $f^2 \in L_1(]0,+\infty[)$? Justifiez.

ii. Montrez que si $f \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ alors $f(x)\sin x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$.

iii. Montrez que si $f(x-\pi/2)\sin x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ alors $f(x)\cos x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$.

SOLUTION TYPE

Question I

i. • Nous constatons d'abord que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$e^{-\lambda x} \sin x \in C_0([0,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[0,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de $+\infty$.

Continuité sur $[0,+\infty[$: 2 pts

• Quand $\lambda > 0$, on a

$$e^{-\lambda x} \sin x = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \to +\infty)$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\lambda x}\sin x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \sin x \; e^{-\lambda x} = 0, \quad \forall \lambda > 0$$

Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.
Nous ne pouvons par contre en tirer aucune conclusion définitive pour $\lambda \leq 0$.

Intégrabilité pour $\lambda > 0$: 3 pts dont 2 pts pour la justification par le comportement asymptotique. La vérification par le calcul de la limite n'est pas attendue.

• Quand $\lambda \leq 0$, on a

$$\frac{1}{x} = o\left(e^{-\lambda x} \sin x\right), \quad (x \to +\infty)$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^{-\lambda x}\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x \sin x} = 0, \quad \forall \lambda \leq 0$$

L'intégrale n'existe donc pas pour $\lambda \leq 0$.

Non-intégrabilité pour $\lambda \leq 0$: 3 pts dont 2 pts pour la justification par le comportement asymptotique. La vérification par le calcul de la limite n'est pas attendue.

En conclusion, I_λ existe si et seulement si $\lambda > 0$

Conclusion : 1 pt

Total i. : 9 pts

ii. Quand $\lambda > 0$, I_λ peut être calculée de trois façons différentes.

• Considérant que $\sin x = \Im e^{ix}$, on a

Inutile de calculer l'intégrale en utilisant les 3 méthodes, une seule suffit !

$$\begin{aligned}
I_\lambda &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x \, dx \\
&= \Im \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{ix} \; dx = \Im \int_0^{+\infty} e^{(i-\lambda)x} \; dx \\
&= \Im \left[\frac{e^{(i-\lambda)x}}{i-\lambda} \right]_0^{+\infty} = \Im \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\cos x + i \sin x)}{i-\lambda} - \frac{1}{i-\lambda} \right] \\
&= \Im \frac{1}{\lambda - i} = \Im \frac{\lambda + i}{\lambda^2+1} \\
&= \frac{1}{1+\lambda^2}
\end{aligned}$$

- Calculons par parties la primitive

$$F(x) = \int e^{-\lambda x} \sin x \, dx$$

Posant $f(x) = e^{-\lambda x}$ et $g'(x) = \sin x$, on a $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ et $g(x) = -\cos x$, de sorte que

$$F(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx = -e^{-\lambda x}\cos x - \lambda \int e^{-\lambda x}\cos x \, dx$$

Une nouvelle primitivation par parties conduit, en considérant $f(x) = e^{-\lambda x}$ et $g'(x) = \cos x$, donc $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ et $g(x) = \sin x$, à

$$F(x) = -e^{-\lambda x}\cos x - \lambda \left(e^{-\lambda x}\sin x + \lambda \int e^{-\lambda x}\sin x \, dx \right)$$

ou encore

$$F(x) = -e^{-\lambda x}\cos x - \lambda e^{-\lambda x}\sin x - \lambda^2 F(x)$$

de sorte que

$$F(x) = \frac{1}{1+\lambda^2}\left[-e^{-\lambda x}\cos x - \lambda e^{-\lambda x}\sin x\right]$$

Finalement,

$$I_\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin x \, dx = \Big[F(x)\Big]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

- Le calcul peut également être mené en utilisant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Posant $f(x) = e^{-\lambda x}$ et $g'(x) = \sin x$, on a $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ et $g(x) = -\cos x$, de sorte que

$$\begin{aligned} I_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx &= \Big[-e^{-\lambda x}\cos x\Big]_0^\infty - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos x dx \\ &= 1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos x dx \end{aligned}$$

Cette application de la formule d'intégration par parties est justifiée par le fait [1] que $e^{-\lambda x}\sin x$ et $e^{-\lambda x}\cos x$ appartiennent à $\mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ pour $\lambda > 0$, l'intégrabilité de $e^{-\lambda x}\cos x$ pouvant être aisément démontrée en adaptant le raisonnement mené en i.

On retire 1 pt si on ne justifie pas l'application de la méthode d'intégration par parties.

Une nouvelle intégration par parties avec $f(x) = e^{-\lambda x}$ et $g'(x) = \cos x$, donc $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ et $g(x) = \sin x$, conduit à

$$\begin{aligned} I_\lambda &= 1 - \lambda\Big[e^{-\lambda x}\sin x\Big]_0^\infty - \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx \\ &= 1 - 0 - \lambda^2 \; I_\lambda \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$I_\lambda = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

Total ii. : 6 pts

TOTAL QI : 15 PTS

1. De façon alternative, on peut invoquer le fait que $e^{-\lambda x}\sin x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ et que la variation de $-e^{-\lambda x}\cos x$ entre 0 et $+\infty$ est finie.

Question II

L'expression

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 x e^{y^2} \, dy \right) dx = \int_0^2 x \left(\int_{x^2}^4 e^{y^2} \, dy \right) dx$$

ne peut être calculée telle quelle puisqu'on ne connaît pas de primitive de e^{y^2}.

Elle est cependant équivalente à

$$I = \iint_{\mathtt{E}} x e^{y^2} \, dxdy$$

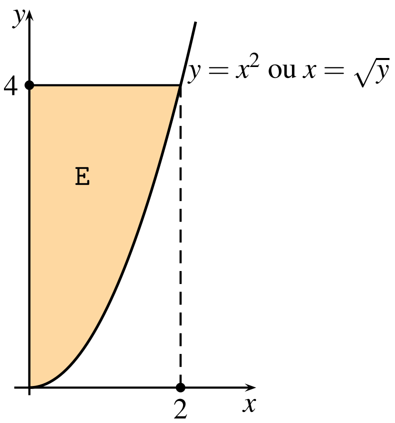
où (voir figure)

$$\mathtt{E} = \left\{ (x,y) : x \in]0,2[\text{ et } x^2 < y < 4 \right\}$$

si cette intégrale double existe. C'est bien le cas puisque l'intégrand est continu sur le compact $\bar{\mathtt{E}}$.

Passage par l'intégrale double : 2 pts dont 1 pt pour l'expression mathématique du domaine.

Justification de l'existence de l'intégrale double : 1 pt



Représentation graphique du domaine : 1 pt

D'après Fubini, cette intégrale peut être calculée dans l'ordre d'intégration partielle que l'on veut. Celui de l'énoncé ne menant à rien, nous décrivons le domaine en faisant varier

- y de 0 à 4
- et, pour y fixé, x de 0 à $\sqrt{y}$,

soit

$$I = \int_0^4 e^{y^2} \, dy \int_0^{\sqrt{y}} x \, dx = \int_0^4 \frac{y}{2} e^{y^2} \, dy = \left[\frac{e^{y^2}}{4} \right]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1)$$

Appel à Fubini ou à son énoncé : 1 pt

Réduction dans l'autre ordre : 2 pts

Calcul et valeur exacte : 3 pts

TOTAL QII : 10 PTS

Question III

i. FAUX.

Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Réponse donnée sans justification : 0 pt.

La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque

- $f \in C_0(]0,+\infty[)$;

Production d'un contre-exemple correct : 2 pts

- au voisinage de 0,

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad (x \to 0)$$

et est donc intégrable ;

- au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \qquad (x \to +\infty)$$

et est donc intégrable.

Justification des propriétés du contre-exemple : 2 pts

Par contre,

$$f^2(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} \sim \frac{1}{x}, \qquad (x \to 0)$$

de so rte que f n'est pas intégrable au voisinage de l'origine. Dès lors, $f^2 \notin \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$.

Total i. : 4 pts

ii. L'intégrale de Lebesgue étant absolument convergente,

$$f \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[) \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$$

Justification de l'intégrabilité de $|f|$: 1 pt

Dès lors, puisque

$$|f(x)\sin x| \leq |f(x)| \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[),$$

Appel au critère de Lebesgue : 2 pts

le critère de Lebesgue (*'Toute fonction mesurable de module majoré par une fonction intégrable est elle-même intégrable.'*) permet de conclure à l'intégrabilité de $f(x)\sin x$ sur $]0,+\infty[$.

Total ii. : 3 pts

iii. Par application du résultat général

$$f(\mathrm{x}) \in \mathbb{L}_1(\mathtt{E}) \qquad \Leftrightarrow \qquad f[\mathrm{x}(\mathrm{x}')]\left|\frac{\partial(\mathrm{x})}{\partial(\mathrm{x}')}\right| \in \mathbb{L}_1(\mathtt{E}')$$

à la fonction $f(x-\pi/2)\sin x$ avec $\mathtt{E} =]0,+\infty[$ en considérant le changement de variable $x = x' + \pi/2$, il vient

Application du changement de variable : 2 pts

$$\begin{aligned} f(x-\pi/2)\sin x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[) \qquad &\Leftrightarrow \qquad f(x')\sin(x'+\pi/2) \in \mathbb{L}_1(]-\pi/2,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow \qquad f(x')\cos x' \in \mathbb{L}_1(]-\pi/2,+\infty[) \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $f(x')\cos x'$ est intégrable sur $]-\pi/2,+\infty[$, elle l'est également sur $]0,+\infty[\subset]-\pi/2,+\infty[$. Dès lors

$$f(x-\pi/2)\sin x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[) \qquad \Rightarrow \qquad f(x)\cos x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$$

Gestion des intervalles : 1 pt

Total iii. : 3 pts

TOTAL QIII : 10 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i. L'existence de l'intégrale proposée doit être justifiée, comme celle de toute intégrale, en étudiant le comportement de l'intégrand sur le domaine d'intégration. Il ne suffit pas de vérifier ce comportement au voisinage des seules bornes d'intégration. Il faut toujours, et avant tout, examiner ce qui se passe dans le domaine d'intégration même si on peut très souvent simplement invoquer la continuité de l'intégrand sur celui-ci. Il faut ensuite examiner spécifiquement le comportement de l'intégrand dans chacun des voisinages où l'intégrabilité ne peut être justifiée par la continuité (y compris à l'infini) en comparant l'intégrand à des fonctions dont le comportement est connu.

   On peut épingler ici quelques erreurs rencontrées.

   - Une fonction qui tend vers 0 à l'infini n'y est pas forcément intégrable. Pensons par exemple à la fonction $1/x$.
   - L'intégrand doit être considéré comme un tout. Il n'est pas correct d'étudier le comportement de l'exponentielle puis d'en déduire celui du produit de l'exponentielle et du sinus.
   - Les critères d'intégrabilité (*resp.* non-intégrabilité) ne constituent que des conditions suffisantes d'intégrabilité (*resp.* non-intégrabilité). Si une fonction ne vérifie pas le critère d'intégrabilité (*resp.* non-intégrabilité) dans un voisinage donné, on ne peut pas en conclure qu'elle n'est pas (*resp.* qu'elle est) intégrable dans ce voisinage. Ceci doit être fait en utilisant un critère de non-intégrabilité (*resp.* intégrabilité).
   - Le développement en série de Taylor ne pouvait être utilisé pour obtenir le comportement asymptotique de l'intégrand à l'infini. Rappelons que la formule de Taylor ne s'applique qu'au voisinage d'un point où la fonction est définie et (une ou plusieurs fois) continûment dérivable, donc jamais à l'infini.

ii. Comme rappelé dans la solution type, l'*intégration par parties* demande que non seulement l'intégrand fg' soit intégrable mais également le produit $f'g$ apparaissant lors de l'utilisation de la formule. Ceci requiert donc un effort supplémentaire qui conduit logiquement à préférer l'utilisation de la formule de *primitivation par parties* pour calculer la primitive qu'il suffit ensuite de faire varier entre les bornes d'intégration en vertu du théorème fondamental du calcul intégral.

Question II

- Tout exercice de calcul intégral à plusieurs dimensions demande une définition mathématique précise du domaine d'intégration ainsi qu'un dessin. C'est le point de départ essentiel de ce type d'exercice car cela permet de vérifier si le domaine est compact, de réduire correctement l'intégrale ou de renverser l'ordre d'intégration.
- Les bornes d'intégration définissent le domaine. La variable y varie ici entre x^2 et 4. le domaine est donc situé au-dessus de la parabole et pas en dessous.
- Quand le calcul d'une suite d'intégrales partielles n'est pas faisable dans l'ordre proposé, il ne suffit pas de renverser l'ordre d'intégration. Il est impératif de justifier l'existence de l'intégrale double correspondante pour pouvoir affirmer que les deux ordres d'intégration partielle conduisent au même résultat. Ce n'est qu'à cette condition que le résultat obtenu peut être considéré comme la valeur demandée.

Question III

i. La façon la plus efficace de démontrer qu'un énoncé est faux est de donner un contre-exemple. Cet exemple doit vérifier les hypothèses et contredire la thèse. Il fallait donc trouver ici une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ mais dont le carré ne l'est pas.

ii.
- Il s'agissait ici de démontrer l'énoncé proposé. Rappelons qu'un exemple ne permet jamais de démontrer un énoncé et qu'il était donc indispensable de donner une vraie démonstration. Trouver une fonction $f(x)$ vérifiant l'énoncé ne répondait pas à la question posée.
- Le critère de Lebesgue demande de majorer le *module* de la fonction étudiée. Il convenait donc d'introduire une majoration de $|f(x)\sin x|$ et de justifier l'intégrabilité du majorant $|f|$ par l'intégrabilité de f.
- Il fallait faire appel à la caractéristique de convergence absolue de l'intégrale de Lebesgue pour justifier l'intégrabilité de $|f|$.

iii.
- Il s'agissait encore ici d'un énoncé à démontrer. L'examen attentif des deux fonctions devait faire penser à un changement de variable permettant de passer du sinus au cosinus.
- Il fallait bien sûr utiliser la formule du changement de variable dans une intégrale et ne pas oublier le Jacobien, même si celui-ci vaut 1 dans le cas présent.
- Il ne fallait pas oublier de modifier le domaine d'intégration en fonction du changement de variable effectué.