Prof. Éric J.M. DELHEZ

Avril 2017

# ANALYSE MATHÉMATIQUE
## ÉVALUATION FORMATIVE

*Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
*Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
*Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
*Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
*Consultez les conseils pour une bonne présentation des copies disponibles sur www.mmm.ulg.ac.be.*
*Les copies seront reprises lors du cours du* **25 avril** *et rendues corrigées le* **9 mai** *entre 8h15 et 8h30 dans le local S28 (TP Physique).*

### Question I

Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\iint_{\mathrm{E}} \frac{dxdy}{xy}$$

où $\mathrm{E}$ est la région du premier quadrant comprise entre la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$.

### Question II

Calculez le volume du paraboloïde elliptique de hauteur $H$ dont la surface latérale a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{H}$$

Montrez que ce volume vaut la moitié du volume du cylindre elliptique circonscrit.

### Question III

i. Peut-on affirmer que toute fonction intégrable sur un compact $[a,b]$ est continue par morceaux (ou continue) sur ce compact ? Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.

ii. Montrez que si $f \in \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$ possède une limite finie en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

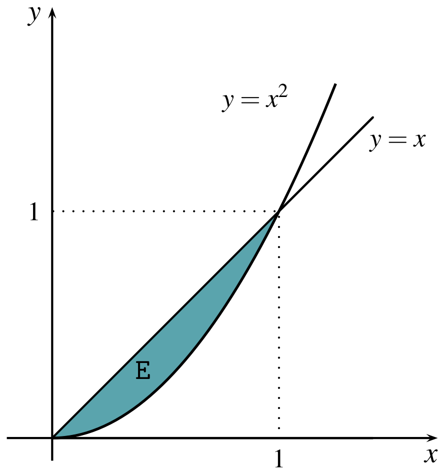
iii. Peut-on affirmer que si $f \in C_0([1,+\infty[) \cap \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$ possède une limite finie en $+\infty$, alors $f^2 \in \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$ ? Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

On a
$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{dxdy}{xy}$$
où
$$\mathtt{E} = \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [x^2,x]\}$$

$\mathtt{E}$ est un compact mais la fonction $1/(xy)$ n'est pas continue sur $\mathtt{E}$ puisqu'elle n'est pas définie au point $(0,0)$.




*Définition mathématique ou représentation graphique du domaine : 2 pts*

*Identification du problème éventuel d'intégrabilité : 1 pt*

L'intégrand étant positif sur $\mathtt{E}$, on a $|1/(xy)| = 1/(xy)$ et l'existence des intégrales successives
$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{1}{xy} dy$$
assurerait l'existence de l'intégrale double (Tonelli).

*Appel à Tonelli : 1 pt*
*Réduction de l'intégrale : 1 pt*

- Pour (presque) tout $x$ dans $]0,1[$, $1/(xy)$ est intégrable par rapport à $y$ sur l'intervalle $]x^2,x[$ puisque
$$\frac{1}{xy} \in C_0([x^2,x])$$
On calcule aisément
$$\int_{x^2}^x \frac{1}{xy} dy = \frac{1}{x}\left[\ln y\right]_{x^2}^x = \frac{1}{x}\left(\ln x - \ln x^2\right) = \frac{1}{x}\ln\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

*Justification de la première intégrale : 2 pts*

*Calcul de la première intégrale : 2 pts*

- Il faut ensuite examiner si
$$-\frac{\ln x}{x} \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$$
Ce n'est pas le cas puisque
$$\frac{1}{x} = o\left(-\frac{\ln x}{x}\right), \quad x \to 0$$
Le non-intégrabilité de $-\ln x/x$ dans l'intervalle considéré peut aussi être démontrée en remarquant que cette fonction admet la primitive
$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln^2 x \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$$
or, si $-\ln x/x$ était intégrable sur $]0,1[$, sa primitive admettrait une limite finie en 0.

*Justification de la non-intégrabilité : 2 pts*

Les raisonnements ci-dessus montrent que $1/(xy) \notin \mathbb{L}_1(\mathtt{E})$. En effet, si une fonction est intégrable, tous les ordres d'intégration partielle existent et conduisent au même résultat (théorème de Fubini). Puisqu'on a trouvé un ordre d'intégration partielle qui n'existe pas, on en conclut que la fonction n'est pas intégrable sur le domaine $\mathtt{E}$ considéré.

*Conclusion avec justification : 1 pt. Point pas attribué si l'étudiant ne montre pas qu'il a compris que la non-intégrabilité ne découle pas de l'échec de Tonelli (condition seulement suffisante d'intégrabilité) mais de la non-existence de l'ordre d'intégration partielle choisi.*

TOTAL QI : 12 PTS

Question II

Le volume du corps considéré s'exprime par

*Expression intégrale du volume : 1 pt*

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

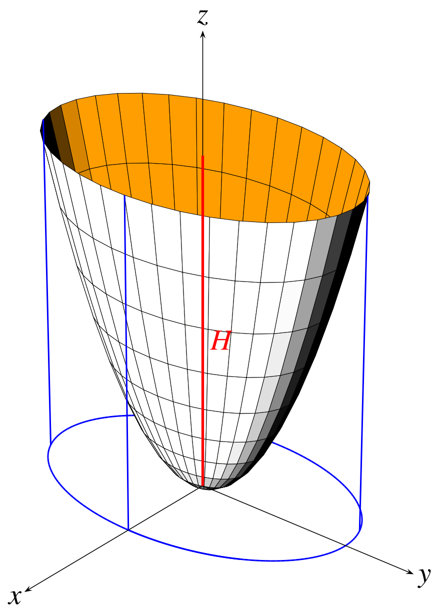
où

*Définition mathématique du domaine : 2 pts*

$$\mathtt{E} = \left\{ (x,y,z) : 0 \le z \le H,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{z}{H} \right\}$$

L'intégrale existe puisque l'intégrand est continu sur le compact $\mathtt{E}$. Elle peut donc être calculée dans n'importe quel ordre d'intégration partielle, en vertu du théorème de Fubini.

*Justification de l'existence de l'intégrale : 1 pt*




Pour décrire $\mathtt{E}$, la coordonnée verticale $z$ varie de 0 à $H$ et, pour $z$ fixé, les variables $x$ et $y$ décrivent la surface elliptique $\Sigma(z)$ dont le pourtour est l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{H}$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{z}}{\sqrt{H}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{z}}{\sqrt{H}}\right)^2} = 1$$

On a donc

*Réduction de l'intégrale : 2 pts*

$$V = \int_0^H dz \iint_{\Sigma(z)} dxdy$$

Puisque l'intégrale de la fonction 1 sur l'ellipse $\Sigma(z)$ représente l'aire de cette ellipse, il vient

*Calcul : 3 pts*

$$V = \int_0^H \pi \left(\frac{a\sqrt{z}}{\sqrt{H}}\right)\left(\frac{b\sqrt{z}}{\sqrt{H}}\right) dz = \frac{\pi ab}{H}\int_0^H z\,dz = \frac{\pi abH}{2}$$

Le cylindre circonscrit est un cylindre elliptique dont le pourtour de la section elliptique a pour équation

*Identification du cylindre circonscrit : 1 pt*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Son volume vaut donc $\pi abH$ et est bien égal au double de celui du paraboloïde considéré.

TOTAL QII : *10 pts*

Remarquons qu'il est aussi possible, mais bien plus long, de réduire complètement l'intégrale sur l'ellipse $\Sigma(z)$ en faisant varier

- $x$ de $-a\sqrt{z}/\sqrt{H}$ à $a\sqrt{z}/\sqrt{H}$
- et, pour $x$ fixé, $y$ de $-b\sqrt{z/H - x^2/a^2}$ à $b\sqrt{z/H - x^2/a^2}$

On a alors

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^H dz \int_{-a\sqrt{z}/\sqrt{H}}^{a\sqrt{z}/\sqrt{H}} dx \int_{-b\sqrt{z/H-x^2/a^2}}^{b\sqrt{z/H-x^2/a^2}} dy \\
&= 4\int_0^H dz \int_0^{a\sqrt{z}/\sqrt{H}} dx \int_0^{b\sqrt{z/H-x^2/a^2}} dy \\
&= 4\int_0^H dz \int_0^{a\sqrt{z}/\sqrt{H}} b\sqrt{\frac{z}{H}-\frac{x^2}{a^2}}\, dx
\end{aligned}
$$

*Répartition des points comme ci-dessus : 2 pts pour la réduction, 3 pts pour le calcul.*

où l'intégrale par rapport à $x$ peut être calculée en faisant le changement de variable régulier

$$
x = \frac{a\sqrt{z}}{\sqrt{H}}\sin t \quad \to \quad dx = \frac{a\sqrt{z}}{\sqrt{H}}\cos t\, dt
$$

entre $]0, a\sqrt{z}/\sqrt{H}[$ et $]0, \pi/2[$. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
V &= 4\int_0^H dz \int_0^{\pi/2} \frac{abz}{H}\cos^2 t\, dt \\
&= 2\frac{ab}{H}\int_0^H z\, dz \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt \\
&= 2\frac{ab}{H}\int_0^H z\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} dz \\
&= \pi\frac{ab}{H}\int_0^H z\, dz = \pi\frac{abH}{2}
\end{aligned}
$$

## Question III

*Contre-exemple correct : 1 pt*
*Vérification de l'hypothèse : 1 pt*
*Négation de la thèse : 1 pt*
*Pas de point pour une réponse correcte donnée sans justification.*
*Total i : 3 pts*

i. Faux. La fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $[0,1]$ mais n'est pas continue par morceaux (ni continue) sur $[0,1]$ puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

ii. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \neq 0$, alors la fonction ne peut être intégrable au voisinage de l'infini puisque

$$
f(x) \sim a, \qquad (x \to +\infty)
$$

*i.e.*

$$
f(x) \sim \frac{a}{x^\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = 0 \leq 1, \qquad (x\to+\infty)
$$

qui constitue un critère de non-intégrabilité.
Dès lors, si $f \in \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$ possède une limite finie en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Total ii : 3 pts*

iii. Vrai.
D'une part, puisque $f \in C_0([1,+\infty[)$, on a $f \in C_0([1,\beta])$ quel que soit $\beta > 1$. Dès lors $f^2 \in C_0([1,\beta])$ et $f^2 \in \mathbb{L}_1(]1,\beta[)$. *$f^2 \in \mathbb{L}_1(]1,\beta[)$ : 1 pt*

D'autre part, puisque $f \in \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$ possède une limite finie en l'infini, celle-ci est nécessairement nulle (Cf. point ii. ci-dessus). Il existe donc $\beta > 1$ tel que

*$f^2 \in \mathbb{L}_1(]\beta,+\infty[)$ : 2 pts*

$$|f| < 1 \qquad \forall x \in ]\beta,+\infty[$$

Dans ce voisinage, il vient

$$f^2 \leq |f| \in \mathbb{L}_1(]\beta,+\infty[)$$

de sorte que $f$ est intégrable au voisinage de l'infini.

En conclusion, on a donc bien $f^2 \in \mathbb{L}_1([1,+\infty[)$.

*Total iii : 3 pts*

TOTAL QIII : 9 PTS

## COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

### Question I

Puisque l'intégrand n'est pas borné au voisinage de $(0,0)$, on ne peut justifier l'intégrabilité en faisant appel à la continuité de l'intégrand sur le compact d'intégration. Il convenait donc d'appliquer le critère de Tonelli.

- Le critère de Tonelli demande la justification des intégrales partielles successives du **module** de l'intégrand. Il faut le mentionner, même si, dans cet exercice, l'intégrand est positif sur tout le domaine.
- L'application du critère demande de justifier chacune des intégrales partielles successives pour presque toutes les valeurs des variables par rapport auxquelles l'intégration est réalisée ultérieurement. Il fallait donc ici procéder méthodiquement, en commençant par justifier l'existence de l'intégrale par rapport à $y$ sur $]x^2,x[$ pour presque tout $x$ dans $]0,1[$ puis tenter de justifier l'intégrale par rapport à $x$ sur $]0,1[$.
- Le critère de Tonelli n'est qu'une **condition suffisante** d'intégrabilité. L'échec de Tonelli ne permet donc pas de conclure directement à la non-existence de l'intégrale. Par contre, le fait d'avoir trouvé un ordre d'intégration partielle de la fonction qui n'existe pas justifie cette non-existence puisque, en vertu du théorème de Fubini, si l'intégrale existait, tous les ordres d'intégration partielle existeraient et mèneraient à un même résultat.

### Question II

- Tout exercice de calcul intégral à plusieurs dimensions demande une définition mathématique précise du domaine d'intégration ainsi qu'un dessin. C'est le point de départ essentiel de ce type d'exercice car cela permet de vérifier si le domaine est compact et de réduire correctement l'intégrale.
- Toute intégrale calculée doit être justifiée. Ici, la continuité de l'intégrand sur le domaine compact d'intégration devait être mentionnée.
- La façon de réduire une intégrale dépend de la forme du domaine d'intégration. Dans cet exercice, le domaine peut être considéré comme un empilement d'ellipses et la réduction consiste simplement à intégrer sur la hauteur du domaine l'aire de la section elliptique. L'aire d'une ellipse est un résultat connu (et d'ailleurs établi lors du TP précédant cette évaluation).

- Pour déterminer le volume du cylindre circonscrit, il suffisait d'écrire correctement l'équation de l'ellipse correspondant à la section du cylindre par un plan horizontal. Connaissant l'aire de cette ellipse et la hauteur du cylindre, le volume s'en déduisait immédiatement sans aucun calcul intégral.

## Question III

i. et ii. Les critères d'intégrabilité ne fournissent que des conditions suffisantes d'intégrabilité. Ceci a déjà été rappelé ci-dessus à propos du critère de Tonelli. D'autres critères ont été souvent considérés à tort comme des conditions nécessaires et suffisantes dans cette troisième question de l'évaluation.

- Une fonction continue sur un compact est intégrable sur ce compact. Ceci ne constitue cependant qu'une condition suffisante d'intégrabilité. On ne peut pas affirmer que toute fonction intégrable sur un compact (ou sur l'ouvert correspondant puisque $\mathbb{L}_1([a,b]) = \mathbb{L}_1(]a,b[)$ si $a$ et $b$ sont finis) est continue sur ce compact.
- Une fonction asymptotique à $1/x^\alpha$ avec $\alpha > 1$ est intégrable dans le voisinage de l'infini mais une fonction intégrable dans le voisinage de l'infini n'est pas forcément asymptotique à $1/x^\alpha$ avec $\alpha > 1$.

iii. Le résultat donné au point ii. devait être utilisé pour mener à bien la démonstration du point iii.