Mars 2024

Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0502 - Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Question I

i. La convergence absolue de la suite des x_k (*i.e.* la convergence de la suite des modules) entraîne-t-elle la convergence de la suite des x_k ? Justifiez.

ii. La convergence de la suite des x_k entraîne-t-elle la convergence absolue de la suite des x_k ? Justifiez.

iii. On considère la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_m(k)}{\mathcal{P}_n(k)}$$
où $\mathcal{P}_m(k)$ et $\mathcal{P}_n(k)$ sont des polynômes de degrés m et n en k. Pour quelles valeurs de m et n cette série converge-t-elle ? Justifiez.

iv. La fonction $\sin|x|$ admet-elle une représentation en série de puissances de x sur $\mathbb{R}$? Justifiez.

Question II

On considère la série numérique
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k(1-k)}$$

i. Étudiez la convergence de la série.

ii. Déterminez une valeur approchée de cette série avec une erreur maximale de 10^{-2}. Justifiez.

Question III

Les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sont définies par
$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

i. Montrez que $J_0(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrez, en justifiant, que
$$J_0'(x) = \alpha J_1(x)$$
où α est une constante réelle à déterminer.

SOLUTION TYPE

Question I

Pas de valorisation d'une réponse donnée sans justification

i. La convergence absolue de la suite des x_k n'entraîne pas la convergence de la suite des x_k (sans module) comme le montre le contre-exemple de la suite $\{(-1)^k\}$.

Cette suite converge absolument puisque $|(-1)^k| = 1$ et que tous les termes de la suite des modules sont dès lors égaux à 1. Cependant, la suite $\{(-1)^k\}$ est une succession de 1 et -1 et ne converge pas.

Total i. : 2 pts

ii. Si la suite des x_k converge vers a, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geq N) : |x_k - a| \leq \varepsilon$$

Dès lors, il vient

1 pt si le raisonnement utilise (la thèse) $|x_k| \to |a|$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geq N) : \Big| |x_k| - |a| \Big| \leq |x_k - a| \leq \varepsilon$$

de sorte que la suite des $|x_k|$ converge (vers $|a|$). On en déduit que la suite $\{x_k\}$ converge absolument.

Total ii. : 2 pts

iii. Le comportement à l'infini d'un quotient de deux polynômes est dicté par les termes de plus haute puissance. Au voisinage de l'infini, les polynômes sont de signes constants et

Comportement asymptotique du terme général de la série : 1 pt

$$\frac{\mathcal{P}_m(k)}{\mathcal{P}_n(k)} \sim \frac{C}{k^{n-m}}, \quad (k \to \infty)$$

où C est le quotient des coefficients supposés non nuls de k^m et k^n dans $\mathcal{P}_m(k)$ et $\mathcal{P}_n(k)$.

On en déduit que la série proposée converge si et seulement si $n - m > 1$.

Conclusion correcte : 2 pts (dont 1 pt pour le ssi)

Total iii. : 3 pts

iv. Toute série de puissances définit une fonction indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence.

Série de puissances C_∞ (ou dérivable) sur son intervalle de convergence : 1 pt

Si la fonction $\sin|x|$ admettait une représentation en série de puissances de x sur $\mathbb{R}$, elle serait indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, elle n'est pas dérivable en 0 puisque

$\sin|x|$ pas dérivable en 0 : 1.5 pt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin|x| - \sin|0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin|x| - \sin|0|}{x - 0} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1$$

La fonction $\sin|x|$ n'admet donc pas une représentation en série de puissances de x sur $\mathbb{R}$.

Conclusion (correcte, justifiée et) formulée explicitement : 0.5 pt

Total iv. : 3 pts

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

Soit la série numérique

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k(1-k)}$$

i. L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à calculer

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{(1/2)^{k+1}}{(k+1)k}}{\dfrac{(1/2)^k}{k(k-1)}} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{2} < 1$$

La série converge donc absolument.

Application correcte d'un critère de conv. absolue ou de semi-convergence : 2 pts
Justification de la convergence absolue : 2 pts

Total i. : 4 pts

ii. La série étudiée est une série alternée puisque

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k(1-k)} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k v_k \quad \text{où} \quad v_k = \frac{(1/2)^k}{k(1-k)} < 0$$

Cette série est une série convergente dont v_k tend monotonément vers 0 puisque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(1/2)^k}{k(1-k)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{(1/2)^k}{k(1-k)} \uparrow \forall k \geq 2$$

Justification théorique de la majoration du reste : 1 pt pour la série alternée, 1 pt pour v_k tend monotonément vers 0

L'erreur commise en approchant cette série par une de ses sommes partielles est donc majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé.
Si on s'arrête à $k = 2$, l'erreur ε_2 commise est telle que

Majoration de l'erreur (principe ou mise en oeuvre) : 1 pt

$$|\varepsilon_2| \leq \left| \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3 \cdot (-2)} \right| = \frac{1}{48}$$

Ceci ne permet pas de garantir la précision de 10^{-2} attendue. Si on s'arrête à $k = 3$, l'erreur ε_3 commise est telle que

$$|\varepsilon_3| \leq \left| \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4 \cdot (-3)} \right| = \frac{1}{192} < 10^{-2}$$

Détermination du nombre de termes à garder : 1 pt

On obtient donc

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k(1-k)} = \frac{(-\frac{1}{2})^2}{-2} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3(-2)} + \varepsilon_3 = -\frac{5}{48} + \varepsilon_3$$

Valeur approchée (forme fractionnaire ou décimale) : 1 pt

où

$$|\varepsilon_3| < 10^{-2}$$

Total ii. : 5 pts
TOTAL QII : 9 PTS

Les développements précédents montrent que la valeur exacte se situe dans l'intervalle

$$\left]-\frac{5}{48} - \frac{1}{192}, -\frac{5}{48} + \frac{1}{192}\right[= \left]-\frac{21}{192}, -\frac{19}{192}\right[$$

ce qui est approximativement égal à $I =]-0.109375, -0.0989583[$*. Un intervalle arrondi est approprié si et seulement s'il contient la totalité de cet intervalle I. La valeur approchée à* 10^{-2} *près s'écrit naturellement* -0.10 ± 0.01*, ce qui indique que la bonne valeur est dans l'intervalle arrondi* $]-0.11, -0.09[$*. Cet intervalle est approprié puisqu'il contient I, et contient donc la vraie valeur.*

Question III

i. En particularisant la forme générale donnée dans l'énoncé, on obtient

Forme de J_0 : 1 pt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

Appliquons le critère du quotient à la série des modules correspondant à cette série de puissances :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+2}}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2} \frac{2^{2k}(k!)^2}{|x|^{2k}} = \frac{|x|^2}{4} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 0 < 1$$

Application correcte d'un critère : 2 pts dont 1 pt pour avoir considéré la série des modules
Convergence absolue : 1 pt

Nous déduisons que la série de puissances donnée converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Son intervalle de convergence est donc $\mathbb{R}$.

Intervalle de convergence : 1 pt

Puisque toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence, il en résulte que $J_0(x) \in C_\infty(\mathbb{R})$.

Justification du caractère C_∞ par appel aux propriétés des séries de puissances : 1 pt

Total i. : 6 pts

ii. Comme toute série de puissances est dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence, il vient, puisque la dérivée du terme constant correspondant à $k = 0$ est nulle,

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2k\, x^{2k-1}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{2k-1}((k-1)!)^2 k}$$

Valeur de la dérivée terme à terme simplifiée ou pas : 1 pt
Justification théorique : 1 pt

En remplaçant $k-1$ par k, on obtient

$$J_0'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2k}}{k!(1+k)!}$$

Manipulations de la série : 2 pts

On reconnaît dans le membre de droite l'expression de $-J_1(x)$. Les développements justifient donc la relation annoncée $J_0'(x) = \alpha J_1(x)$ avec $\alpha = -1$.

Valeur de α : 1 pt

Total ii. : 5 pts

TOTAL QIII : 11 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

Les deux premiers énoncés sont relatifs à des suites et pas à des séries. Il ne faut pas confondre les suites et les séries car les unes et les autres ne se comportent pas de la même façon et les critères de convergence correspondants ne sont pas identiques. En particulier, la convergence absolue d'une suite n'entraine pas la convergence de la suite et la convergence de la suite entraine sa convergence absolue. Par contre, la convergence absolue d'une série entraine la convergence de la série alors que la convergence de la série n'entraine pas sa convergence absolue.

i.
- Il ne suffit pas d'affirmer qu'il est possible de trouver une suite qui ne converge pas alors qu'elle converge absolument. Il faut donner un exemple d'une telle suite pour en démontrer l'existence.
- Quand un contre-exemple est donné pour réfuter un énoncé, il faut montrer qu'il vérifie les hypothèses (la convergence absolue de la suite ici) et qu'il ne vérifie pas la thèse (la convergence ici).

ii.
- La réponse attendue repose sur le fait que, si la suite converge vers a, alors la suite des modules converge vers $|a|$. Cette implication est l'objet même de la question posée et ne constitue pas un résultat présenté dans le syllabus. Il ne suffisait donc pas d'énoncer ce résultat mais il fallait le démontrer, comme cela est fait dans la solution-type.
- La suite des x_k converge vers a si $\lim_{k\to+\infty} x_k = a$ ce qui se traduit par

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geq N) : |x_k - a| \leq \varepsilon$$

  Cette définition doit être écrite rigoureusement sans oublier d'introduire ε, N et k en utilisant les bons quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- L'inégalité $\Big||x_k| - |a|\Big| \leq |x_k - a|$ est une inégalité triangulaire classique dans $\mathbb{R}$. Elle se démontre aisément en considérant les différents signes possibles pour x_k et a.

iii.
- Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Dans cet énoncé, si $m \geq n$, le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge. Si $m < n$, le terme général de la série tend vers 0. Cependant, cela ne veut pas dire que la série converge. Pour déterminer les valeurs de m et n correspondant à une série convergente, il est fait appel au critère en k^α qui indique que cette série converge si et seulement si $n - m > 1$.
- Le terme général de la série étant asymptotique à celui d'une série de Riemann, la condition donnée par le critère est une condition nécessaire et suffisante de convergence. En effet, si $n - m > 1$, la série converge et si $n - m \leq 1$, la série diverge.

iv.
- Le développement en série de puissances de x de $\sin x$ ne pouvait pas être utilisé pour obtenir un développement en série de puissances de $\sin|x|$. En effet,

  $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

  ne constitue pas une série de puissances de x mais de $|x|$.
- En se basant sur $\sin|x| = \sin x$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\sin|x| = -\sin x$ sur $\mathbb{R}_0^-$, on peut écrire

  $$\begin{cases} \sin|x| = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \\[2ex] \sin|x| = -\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & \text{sur} \quad \mathbb{R}_0^- \end{cases}$$

  Ceci ne constitue pas non plus une représentation en une série de puissances sur $\mathbb{R}$ puisque la série n'est pas la même sur les deux intervalles.

- Comme on l'a fait dans la solution type, on peut justifier le fait que $\sin|x|$ ne possède pas de développement en série de puissances de x par le fait que cette fonction n'est pas dérivable à l'origine alors que toute série de puissances définit une fonction indéfiniment continument dérivable sur son intervalle de convergence, lequel comprend nécessairement l'origine.
  De façon alternative, on peut arguer que la fonction $\sin|x|$ ne remplit pas les hypothèses de la formule de Taylor à l'ordre infini alors que les termes d'une série de puissances s'identifient à ceux de son polynôme de Taylor.

Question II

i.
- Pour étudier la convergence de cette série numérique, le critère du quotient devait être appliqué à la série des modules. Le facteur $1-k$ étant négatif pour $k \geq 2$, il devait être remplacé par $k-1$.
- La série donnée converge absolument. Il fallait le mentionner même si la seule la semi-convergence comme série alternée était nécessaire pour répondre au point ii.

ii.
- Le résultat théorique sur l'évaluation de l'erreur de troncature de la série n'est valable que pour une série alternée dont v_k (voir ci-dessous) tend monotonément vers 0. Il était donc indispensable de vérifier que l'on était bien dans le cadre d'application de ce résultat.
  - ◇ Premièrement, la série doit être alternée et ceci doit être justifié par le fait que la terme général de la série est de la forme $u_k = (-1)^k v_k$ où v_k est de signe constant, ce qui est bien le cas ici puisque
  $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k(1-k)} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k v_k \quad \text{où} \quad v_k = \frac{(1/2)^k}{k(1-k)} < 0$$
  - ◇ Deuxièmement, le terme général de la série doit tendre vers 0 quand k tend vers l'infini, ce qui est également le cas. On a
  $$\lim_{k\to\infty} \frac{(1/2)^k}{k(1-k)} = 0$$
  - ◇ Et enfin, v_k doit tendre monotonément vers 0 à partir d'un certain rang N, ce qui est encore le cas puisque
  $$\frac{(1/2)^k}{k(1-k)} \uparrow \forall k \geq 2$$
- L'erreur commise en approchant une série qui remplit les conditions ci-dessus par une de ses sommes partielles est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé. Le terme correspondant à $k = 4$ est le premier à garantir la précision de 10^{-2} recherchée. C'est donc ce terme qui constitue le premier terme à négliger. La valeur approchée de la série est alors obtenue en sommant les deux premiers termes de la série correspondant à $k = 2$ et $k = 3$.

Question III

De trop nombreuses erreurs de calculs émaillent les copies corrigées. On relèvera en particulier que

$$k!k! = (k!)^2 \quad \text{et pas} \quad 2k!$$

et que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \quad \text{et pas} \quad 2k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}$$

i.
- La réponse à la question posée demandait de faire appel à la propriété des séries de puissances qui sont indéfiniment continument dérivables sur leur intervalle de convergence. Cet intervalle de convergence devait être déterminé en appliquant un critère de convergence, le plus adapté étant ici celui du quotient.

- Le critère du quotient n'est applicable qu'aux séries à termes positifs. Il doit donc être appliqué à la série des modules (pas au module de la série !). La variable x dont le signe est variable doit donc être prise en valeur absolue lors du calcul de la limite intervenant dans ce critère.

ii.
- Quand on dérive terme à terme une série de puissances dont le premier terme est constant (ne dépend pas de x), la valeur initiale de l'indice sommatoire dans la série des dérivées doit être adaptée. On a ici

  $$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

  de sorte que

  $$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \, 2k \, x^{2k-1}}{2^{2k}(k!)^2}$$

- Quand on est amené à modifier l'indice sommatoire dans le terme général d'une série, par exemple en remplaçant $k-1$ par k, il ne faut pas oublier de modifier la valeur initiale de cet indice afin de conserver les mêmes termes dans la série. Ici, puisqu'on augmente k de une unité dans le terme général, il faut diminuer la valeur initiale de l'indice en commençant à $k=0$ au lieu de $k=1$. En procédant de la sorte, le premier terme de la série reste le terme linéaire (celui en x).
- Le nombre α recherché est une constante réelle. Il ne peut dépendre ni de la variable x, ni de l'indice sommatoire k.