Mai 2020

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2

EXAMEN - VERSION A

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

Question 1

i. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, en est-il de même de la série $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k)$ où

$$b_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ +1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \quad ?$$

Justifiez.

ii. La suite des fonctions $f_k(x) = \dfrac{x^{2k+1}}{1+2\,x^{2k}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? Justifiez.

iii. Dans le cas où $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}|/|a_k| = a \in \mathbb{R}_0$, montrez que la série obtenue à partir de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en remplaçant chaque terme par sa primitive qui s'annule en $x = 0$ possède le même intervalle de convergence que la série de départ.

iv. Si $f \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ et $g \in C_1(\mathbb{R})$, peut-on affirmer que $fg \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$? Justifiez.

v. Si $f, g \in \mathbb{L}_1(]1,2[)$, peut-on affirmer que $fg \in \mathbb{L}_1(]1,2[)$? Justifiez.

Question 2

On considère la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)} (x-2)^k$$

i. Étudiez complètement la convergence de la série de fonctions.

ii. Sur quel domaine E cette série définit-elle une fonction f ? Justifiez.

iii. Déterminez une expression approchée de $f(7/4)$ (pas nécessairement la valeur numérique) avec une erreur maximale de 10^{-3}.

iv. Calculez

$$\frac{d}{dx}\Big[(x-2)f(x)\Big]$$

Sur cette base, déterminez une expression analytique de la fonction f valable sur l'intervalle de convergence de la série de puissances. Justifiez.

Question 3

Étudiez l'existence de chacune des intégrales suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. *Les valeurs des intégrales ne sont pas demandées.*

i. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{x^{2/3}} dx$

ii. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^\alpha} dx$

iv. $\displaystyle\iint_{]0,1[\times]0,1[} \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$

Question 4

On considère la surface Σ obtenue par la rotation autour de l'axe OZ du graphique de la fonction

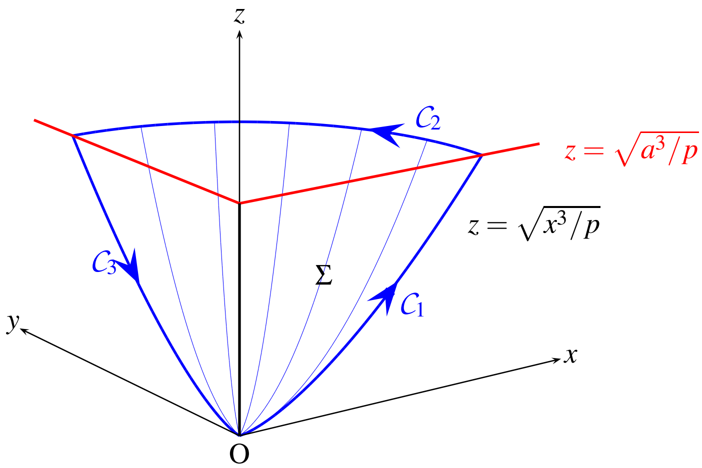
$$z = \sqrt{\frac{x^3}{p}}, \qquad x \in [0,a]$$

limitée au premier octant $(x,y,z \geq 0)$.

On considère également le champ vectoriel

$$\mathbf{F} = \beta \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y}{4a^2 - (x^2+y^2)}$$

où $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes OX et OY. Les constantes a, β et p sont réelles et strictement positives.



i. Déterminez la mesure du volume situé dans le premier octant, limité inférieurement par la surface Σ et supérieurement par le plan $z = \sqrt{a^3/p}$.

ii. Calculez $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ désigne la frontière de Σ (voir dessin) en détaillant les contributions des trois courbes régulières composant $\mathcal{C}$.

iii. Justifiez le résultat de ii. par les théorèmes de l'analyse vectorielle.

SOLUTION TYPE

Question 1

i. De la convergence de $\sum_k a_k$, on ne peut déduire celle de $\sum_k (a_k b_k)$.

Pour le montrer, notons tout d'abord que $b_k = (-1)^{k+1}$ et considérons la série numérique de terme général

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k}$$

Cette série est convergente en tant que série alternée dont le module du terme général décroît monotonement vers zéro. Par contre, il n'en va pas de même de la série considérée

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}(-1)^{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^k\right]^2}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

qui est, quant à elle, divergente (opposé de la série harmonique).

ii. Puisque

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

la suite des fonctions f_k converge sur $[0,1]$ vers

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{x^{2k+1}}{1+2x^{2k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1/3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La limite étant discontinue, la convergence ne peut être uniforme sur $[0,1]$ puisque, les fonctions f_k étant continues sur $[0,1]$, la limite devrait être continue si la convergence était uniforme.

iii. D'une part, en appliquant le critère du quotient à la série des modules $\sum_k |a_k x^k|$, on établit que l'intervalle de convergence $\mathtt{I}$ de cette série est décrit par

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = |x|\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = a|x| < 1 \qquad \text{où} \qquad a = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

soit $\mathtt{I} =]-1/a, 1/a[$.

D'autre part, la série obtenue en remplaçant chaque terme par sa primitive qui s'annule en $x = 0$ est donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \text{puisque} \int a_k x^k dx = a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

Il s'agit encore d'une série de puissances dont l'intervalle de convergence $\mathtt{I}'$ est décrit, par application du même critère du quotient, par

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}x^{k+2}|\,|k+1|}{|k+2|\,|a_k x^{k+1}|} = |x|\lim_{k\to\infty}\left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\,\frac{k+1}{k+2}\right) = a|x| < 1$$

de sorte que $\mathtt{I}' =]-1/a, 1/a[$.

L'intervalle de convergence de la série des primitives est donc identique à celui de la série de départ.

iv. Comme $g \in C_1(\mathbb{R})$, la fonction g est continue sur le compact $[0,1]$ et est dès lors bornée sur $[0,1]$, *i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad : \quad |g(x)| \leq M \qquad \forall x \in [0,1]$$

De là, on a directement

$$|f(x)g(x)| \leq M|f(x)| \qquad \forall x \in]0,1[.$$

Enfin, puisque f est intégrable sur $]0,1[$, il en va de même de $|f|$ et le critère de Lebesgue assure alors l'intégrabilité de fg sur $]0,1[$.

v. De $f, g \in \mathbb{L}_1(]1,2[$, on ne peut déduire que $fg \in \mathbb{L}_1(]1,2[$. Pour le montrer, il suffit de considérer

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad \text{et} \qquad g = f$$

Les fonctions f et g sont continues sur $]1,2]$ et intégrables sur $]1,2[$, alors que

$$f(x)g(x) = \frac{1}{x-1}$$

n'est pas intégrable au voisinage de 1^+.

Question 2

i. L'application du critère du quotient à la série des modules correspondant à la série proposée

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)}(x-2)^k$$

conduit à considérer

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k}\,\frac{k+1}{k+2}\,\frac{|x-2|^{k+1}}{|x-2|^k} = \lim_{k\to\infty} 2\,\frac{k+1}{k+2}\,|x-2| = 2|x-2|^-$$

On en déduit que

(a) la série converge absolument si $2|x-2| < 1$, soit sur l'intervalle de convergence $\mathtt{I} =]3/2, 5/2[$;

(b) la série diverge (avec et sans module) si $2|x-2| > 1$, soit sur $]-\infty, 3/2[\cup]5/2, +\infty[$.

Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $2|x-2| = 1$. Il convient donc d'étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à $x = 5/2$ et $x = 3/2$.
En $x = 5/2$, la série prend la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

La série, à termes positifs, est divergente puisque

$$\frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}, \quad (k \to \infty)$$

i.e. son terme général est asymptotique au terme général de la série harmonique, qui diverge.

En $x = 3/2$, la série s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Cette série est une série alternée qui ne converge pas absolument puisque le module de son terme général est asymptotique au terme général de la série harmonique, qui diverge (voir le cas $x = 5/2$). Par contre, étant donné que le module du terme général de cette série alternée tend monotonément vers 0, la série est semi-convergente.

En conclusion, la série de puissances converge sur $[3/2, 5/2[$. La convergence est absolue sur $\mathtt{I} =]3/2, 5/2[$.
En tant que série de puissances, la série converge uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans $\mathtt{I}$. De plus, la série de puissances convergeant en l'extrémité $3/2$ de son intervalle de convergence, la convergence uniforme peut être étendue à tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset [3/2, 5/2[$.

ii. La série de puissances définit une fonction en chacun des points où elle converge, c'est-à-dire sur l'intervalle $[3/2, 5/2[= \mathtt{E}$.

iii. En $x = 7/4 \in \mathtt{I}$, on calcule

$$f(7/4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+1} \left(\frac{-1}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)2^k}$$

Il s'agit d'une série alternée convergente dont le module du terme général tend monotonément vers 0. L'erreur commise en approchant cette série par une de ses sommes partielles est donc majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé, soit

$$f(7/4) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)2^k} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon| \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$$

Recherchons la plus petite valeur de n pour laquelle

$$\frac{1}{(n+1)2^n} \leq 10^{-3}$$

On calcule successivement

$$n = 6, \qquad \frac{1}{(6+1)2^6} = \frac{1}{448} > 10^{-3}$$
$$n = 7, \qquad \frac{1}{(7+1)2^7} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$$

On peut donc approcher $f(7/4)$ avec une erreur inférieure à 10^{-3} par

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^k}{(k+1)2^k}$$

À titre indicatif, on peut noter que ceci conduit à une valeur approximative de -0.188.

iv. La série de puissances à dériver possédant le même intervalle de convergence $\mathtt{I}$ que la série étudiée ci-dessus et toute série de puissances étant dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big[(x-2)f(x)\Big] &= \frac{d}{dx}\Big[(x-2)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)}(x-2)^k\Big] = \frac{d}{dx}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)}(x-2)^{k+1}\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x-2)^k \end{aligned}$$

Le membre de droite fait apparaître une série géométrique de raison $2(x-2)$ dont la somme peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[(x-2)f(x)\Big] &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k(x-2)^k - 1 \\ &= \frac{1}{1-2(x-2)} - 1 = \frac{1}{5-2x} - 1\end{aligned}$$

pourvu que la série géométrique converge, ce qui est le cas si $|2(x-2)| < 1$, *i.e.* si $x \in \mathtt{I}$.
En primitivant les deux membres de l'égalité, on obtient

$$(x-2)f(x) = \int \left[\frac{1}{5-2x} - 1\right] dx = -\frac{1}{2}\ln(5-2x) - x + C$$

La constante d'intégration peut être fixée en considérant cette égalité pour $x=2$. Il vient

$$0 = -\frac{1}{2}\ln 1 - 2 + C \qquad \text{soit} \qquad C = 2$$

Dès lors,

$$f(x) = \frac{\ln(5-2x)}{2(2-x)} - 1 \tag{$\diamondsuit$}$$

Formellement, ce résultat est valable sur $\mathtt{I} =]^3/_2, ^5/_2[$ sauf en $x=2$, en raison de la division par $(x-2)$. Cependant, en considérant la forme de la série initiale, on trouve aisément que $f(2)=0$ et

$$f(2) = 0 = \lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(5-2x)}{2(2-x)} - 1\right)$$

En invoquant la continuité de la série en son extrémité où elle converge et du membre de droite en $x = 3/2$, on peut également justifier que ($\diamondsuit$) reste valable sur $\mathtt{E} = [^3/_2, ^5/_2[$.

Question 3

i. La fonction $f(x) = x^{-2/3}\ \ln x$ est continue sur $]0,1/2]$ de sorte que l'existence de l'intégrale proposée dépend du comportement de f au voisinage de 0^+.
Puisque

$$\ln x = o\left(\frac{1}{x^{1/6}}\right), \qquad (x \to 0^+)$$

on a

$$\frac{\ln x}{x^{2/3}} = o\left(\frac{1}{x^{5/6}}\right), \qquad (x \to 0^+)$$

Dès lors la fonction est également intégrable au voisinage de 0 et donc $f \in \mathbb{L}_1(]0,1/2[)$.

ii. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ est réelle et de signe constant au voisinage de l'infini et telle que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} + C$$

Puisque la primitive $F(x) = 2\sqrt{\ln x}$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$, la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, de sorte que $f \notin \mathbb{L}_1(]2,+\infty[)$.

iii. D'une part,

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^\alpha} \in C_0([0,+\infty[)$$

quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction est donc intégrable sur $]0,\beta[$ quel que soit $\beta > 0$. Pour examiner l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, on note que $\operatorname{arctg} x \sim \pi/2$ pour $x \to +\infty$ de sorte que

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^\alpha} \sim \frac{\pi}{2x^\alpha} \qquad (x \to +\infty)$$

On en déduit que $f \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ si $\alpha > 1$ et n'est pas intégrable si $\alpha \leq 1$.

iv. Par le critère de Tonelli, l'intégrale double

$$\iint_{]0,1[\times]0,1[} \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$$

existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a un sens. Puisque l'intégrand est positif sur le domaine d'intégration, il suffit de montrer l'existence des intégrales successives apparaissant dans

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} dx$$

- Pour presque tout $y \in]0,1[$, la fonction

$$g(x) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

est continue sur $[0,1]$ et donc intégrale sur $]0,1[$. On calcule aisément

$$G(y) = \int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln(1+y^2) - \ln y^2\right]$$
$$= \ln\sqrt{1+y^2} - \ln y$$

- La fonction $G \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ car les deux termes du membre de droite qui la composent sont intégrables sur cet intervalle. En effet,
  (a) la fonction $\ln\sqrt{1+y^2}$ est continue sur le fermé borné $[0,1]$ et est donc intégrable sur $]0,1[$;
  (b) la fonction $\ln y \in \mathbb{C}_0(]0,1])$ est telle que

$$\ln y = o\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right), \qquad (y \to 0^+)$$

  et est donc intégrable sur $]0,1[$.

Par le critère de Tonelli, on peut ainsi affirmer l'existence de l'intégrale double proposée.

De façon alternative, on peut démontrer l'existence de l'intégrale en considérant l'autre ordre d'intégration partielle de f ou encore en démontrant que $f \in \mathbb{L}_1(\mathtt{E}')$ où

$$\mathtt{E}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2+y^2 \leq 2\} \supset \mathtt{E} =]0,1[\times]0,1[$$

La fonction f est positive sur $\mathtt{E}'$ et, par passage en coordonnées polaires, on a

$$\iint_{\mathtt{E}'} f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\,\frac{r\cos\theta}{r^2} dr = \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}} dr\right)$$

où les deux intégrales du membre de droite existent puisque les intégrands sont continus sur les compacts correspondants. Puisque $f \in \mathbb{L}_1(\mathtt{E}')$, il vient aussi $f \in \mathbb{L}_1(\mathtt{E})$ puisque $\mathtt{E} \subset \mathtt{E}'$.

Question 4

i. Compte tenu de sa géométrie, le volume est aisément décrit en coordonnées cylindriques. En tenant compte du Jacobien de la transformation, et du fait que la surface considérée coupe le plan $z = \sqrt{a^3/p}$ pour $x = a$, on a

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r\,dr \int_{z(r)}^{\sqrt{a^3/p}} dz \qquad \text{où } z(r) = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{p}} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{a^{3/2} r - r^{5/2}}{\sqrt{p}} dr \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{p}} \left[\frac{a^{3/2} r^2}{2} - \frac{2\,r^{7/2}}{7} \right]_0^a \\
&= \frac{3\pi a^3}{28} \sqrt{\frac{a}{p}}
\end{aligned}
$$

De façon alternative, le volume peut être considéré comme un empilement de quarts de disques $\Sigma(z)$ dont le rayon $R(z) = p^{1/3} z^{2/3}$ varie avec la coordonnée verticale $z \in [0, \sqrt{a^3/p}]$. Selon cette approche, on a donc

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\sqrt{a^3/p}} dz \iint_{\Sigma(z)} dxdy = \int_0^{\sqrt{a^3/p}} \left(\frac{1}{4} \pi R^2(z) \right) dz \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{a^3/p}} p^{2/3} z^{4/3} dz = \frac{p^{2/3}\pi}{4} \left[\frac{3z^{7/3}}{7} \right]_0^{\sqrt{a^3/p}} \\
&= \frac{3\pi a^3}{28} \sqrt{\frac{a}{p}}
\end{aligned}
$$

puisque l'aire d'un quart de disque de rayon $R(z)$ est donnée par

$$
\iint_{\Sigma(z)} dxdy = \frac{1}{4} \pi R^2(z)
$$

ii. L'arc $\mathcal{C}_1$ est décrit par

$$
\mathbf{s}(x) = x\mathbf{e}_x + \frac{x^{3/2}}{\sqrt{p}} \mathbf{e}_z, \qquad x \in [0, a]
$$

On a donc,

$$
\mathbf{s}'(x) = \mathbf{e}_x + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{p}}\, \mathbf{e}_z \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] = \beta \frac{x\mathbf{e}_x}{4a^2 - x^2}
$$

Dès lors,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^a \mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] \cdot \mathbf{s}'(x) dx \\
&= \beta \int_0^a \frac{x}{4a^2 - x^2} dx \\
&= \beta \left[-\frac{1}{2} \ln(4a^2 - x^2) \right]_0^a = -\frac{1}{2} \beta \ln(3a^2) + \frac{1}{2} \beta \ln(4a^2) = \frac{1}{2} \beta \ln \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

En adoptant des coordonnées cylindriques, l'arc $\mathcal{C}_2$ est décrit par

$$
\mathbf{s}(\theta) = a \cos\theta\, \mathbf{e}_x + a \sin\theta\, \mathbf{e}_y + \sqrt{\frac{a^3}{p}} \mathbf{e}_z = a\mathbf{e}_r(\theta) + \sqrt{\frac{a^3}{p}} \mathbf{e}_z, \qquad \theta \in [0, \pi/2]
$$

Dès lors, il vient

$$\mathbf{s}'(\theta) = -a\sin\theta\,\mathbf{e}_x + a\cos\theta\,\mathbf{e}_y = a\mathbf{e}_\theta$$

et, par ailleurs,

$$\mathbf{F}[\mathbf{s}(\theta)] = \beta\frac{a\cos\theta\,\mathbf{e}_x + a\sin\theta\,\mathbf{e}_y}{4a^2 - a^2} = \frac{\beta}{3a}\mathbf{e}_r$$

On observe donc que

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}[\mathbf{s}(\theta)]\cdot\mathbf{s}'(\theta)d\theta = 0$$

L'intégrale curviligne sur C_3 se calcule de façon semblable à celle sur C_1 mais en étant attentif à l'orientation de la courbe. L'intégrale curviligne sur C_3 est l'opposé de celle sur

$$-C_3 \quad : \quad \mathbf{s}(y) = y\mathbf{e}_y + \frac{y^{3/2}}{\sqrt{p}}\mathbf{e}_z, \qquad y \in [0,a]$$

pour laquelle

$$\mathbf{s}'(y) = \mathbf{e}_y + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{p}}\mathbf{e}_z \qquad \text{ainsi que} \qquad \mathbf{F}[\mathbf{s}(y)] = \beta\frac{y\mathbf{e}_y}{4a^2 - y^2}$$

Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= -\int_{-C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\\ &= -\int_0^a \mathbf{F}[\mathbf{s}(y)]\cdot\mathbf{s}'(y)dy\\ &= -\beta\int_0^a \frac{y}{4a^2-y^2}dy = -\frac{1}{2}\beta\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on trouve

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\\ &= \frac{1}{2}\beta\ln\frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2}\beta\ln\frac{4}{3} = 0\end{aligned}$$

iii. Par application de la formule de Stokes, l'intégrale curviligne peut être exprimée sous la forme

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_\Sigma (\nabla\wedge\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

Or, en tout point de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\nabla\wedge\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\beta x}{4a^2-(x^2+y^2)} & \dfrac{\beta y}{4a^2-(x^2+y^2)} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta y}{4a^2-(x^2+y^2)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta x}{4a^2-(x^2+y^2)}\right)\right]\mathbf{e}_z$$

$$= \frac{2\beta xy}{(4a^2-x^2-y^2)^2} - \frac{2\beta xy}{(4a^2-x^2-y^2)^2} = 0$$

Dès lors, il vient

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_\Sigma (\nabla\wedge\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$$

De façon alternative, on peut remarquer que **F** est irrotationnel sur un ouvert simplement connexe contenant Σ de sorte qu'il dérive d'un potentiel scalaire V. Par le théorème fondamental des intégrales curvilignes, on en déduit que la circulation sur une courbe fermée est égale à 0 puisque cette intégrale est la différence entre les valeurs prises par V aux extrémités de C et que ces extrémités sont confondues.