LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2023

MATH0502 - Analyse Mathématique 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. De la convergence uniforme sur $[a,b]$ de la suite des $f_k \in C_0([a,b])$, peut-on déduire la majoration uniforme des f_k sur $[a,b]$, c'est-à-dire l'existence d'une constante $C > 0$ et d'un entier $N > 0$ tels que, pour tout $k \geq N$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a $|f_k(x)| \leq C$? Justifiez.

ii. Justifiez pourquoi la fonction

$$f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2}\right)$$

n'admet pas de représentation en série de puissances de x sur un intervalle $]-\rho,\rho[$ non vide.

iii. Montrez que si $f \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ alors $f(x)\cos x \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$.

iv. Le théorème d'Ampère affirme que la circulation de l'induction magnétique $\mathbf{B}$ sur une courbe $\mathcal{C}$ est égale au produit de la perméabilité magnétique du vide μ_0 et du courant électrique total i traversant toute surface Σ s'appuyant sur la courbe $\mathcal{C}$. Le paramètre μ_0 est une constante strictement positive. Le courant électrique i est compté positivement dans le sens compatible avec la règle de la main droite appliquée au sens de parcours de $\mathcal{C}$.

(a) Exprimez mathématiquement cette loi en utilisant le formalisme du calcul intégral en supposant que $\mathbf{B} \in C_1(\mathbb{R}^3)$ et que $\mathcal{C}$ est une courbe régulière de longueur finie.

(b) Exprimez i en fonction du vecteur densité de courant $\mathbf{j}$ (courant par unité de surface) en sachant que i est égal au flux de $\mathbf{j}$ à travers n'importe quelle surface Σ régulière s'appuyant sur $\mathcal{C}$.

(c) Déduisez la forme différentielle locale (sans intégrale) du théorème d'Ampère en justifiant les opérations effectuées.

Question II

On considère la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)^2}$$

i. Étudiez la convergence de cette série.

ii. Pour quelles valeurs de x cette série définit-elle une fonction ?

iii. Sur quel intervalle la fonction f définie par la série est-elle continue ? Justifiez.

iv. Montrez, en justifiant, que f vérifie une relation du type

$$\frac{d}{dx}[x^2 f(x)] = \begin{cases} \alpha \dfrac{\ln(1-x)}{x} + \beta & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes à déterminer. Sur quel intervalle cette relation est-elle vérifiée ? Justifiez votre réponse.

Rappel : $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $\forall x \in [-1,1[$.

Question III

Étudiez l'existence des intégrales suivantes :

i.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2}\, dx$$

ii.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{\ln x}}\, dx$$

iii.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$$

Question IV

On considère une cuve sans couvercle ayant la forme d'un paraboloïde de révolution d'axe vertical et de hauteur h. Le rayon de la section horizontale de la cuve varie avec la coordonnée verticale z (mesurée vers le haut à partir du fond de la cuve) selon $r = \sqrt{2hz}$. La cuve est remplie d'un fluide homogène de masse volumique ρ_0 constante.

i. Esquissez la cuve.

ii. Calculez la masse m du fluide contenu dans la cuve.

iii. Soit la pression hydrostatique $p(z)$ au sein du fluide donnée par

$$p(z) = \rho_0 g(h - z)$$

où la constante $g > 0$ est la norme de l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.

Calculez la résultante $\mathbf{F}$ des forces de pression exercées par le fluide sur la surface Σ de la cuve, c'est-à-dire

$$\mathbf{F} = \iint_\Sigma p(z)\,\mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la cuve.

iv. Vérifiez que les forces agissant sur le fluide s'équilibrent, c'est-à-dire que

$$m\mathbf{g} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Question I

i. La définition de la convergence uniforme peut être exprimée sous la forme

$$f_k \overset{[a,b]}{\Rightarrow} f \quad \text{ssi} \quad (\forall\varepsilon>0)\,(\exists N)\,(\forall x\in[a,b],\forall k\geq N): |\,f_k(x)-f(x)|\leq\varepsilon$$

Choisissant un $\varepsilon > 0$ quelconque, on est donc assuré de l'existence d'un entier N tel que, $\forall x\in[a,b]$ et $\forall k\geq N$,

$$|\,f_k(x)| = |\,f_k(x)-f(x)+f(x)| \leq |\,f_k(x)-f(x)|+|\,f(x)| \leq \varepsilon+|\,f(x)|$$

Par ailleurs, la convergence uniforme sur $[a,b]$ de la suite des $f_k\in C_0([a,b])$ implique que $f\in C_0([a,b])$. La fonction f est donc bornée sur $[a,b]$ de sorte que $\forall x\in[a,b]$, $\exists\, C_1>0$:

$$|\,f(x)|\leq C_1$$

En rassemblant les résultats ci-dessus, on en déduit dès lors l'existence d'une constante $C=C_1+\varepsilon$ et d'un entier N tels que $\forall x\in[a,b]$, $\forall k\geq N$,

$$|\,f_k(x)|\leq\varepsilon+C_1=C$$

ii. Toute série de puissances définit une fonction indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence. Seules les fonctions indéfiniment continûment dérivables sur un intervalle du type $]-\rho,\rho[$ admettent donc une représentation en série de puissances de x.
Tel n'est pas le cas de la fonction f puisque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} f'(x) &= \lim_{x\to0}\cos\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2}\right)\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(1+x^2)-2x\sqrt[3]{x^2}}{(1+x^2)^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\infty\end{aligned}$$

Cette fonction ne peut donc pas être représentée en séries de puissances.

iii. L'intégrale de Lebesgue étant absolument convergente,

$$f\in\mathbb{L}_1(]0,+\infty[) \quad\Leftrightarrow\quad |\,f|\in\mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$$

Dès lors, puisque

$$|\,f(x)\cos x|\leq|\,f(x)|\in\mathbb{L}_1(]0,+\infty[),$$

le critère de Lebesgue permet de conclure à l'intégrabilité de $f(x)\cos x$ sur $]0,+\infty[$. En effet, ce critère affirme que toute fonction mesurable dont le module est majoré par une fonction intégrable est elle-même intégrable.

iv. (a) Le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\mu_0 i$$

(b) Le courant électrique total i traversant une surface Σ s'appuyant sur la courbe $\mathcal{C}$ s'écrit, en fonction du vecteur densité de courant $\mathbf{j}$,

$$i=\iint_\Sigma \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à la surface Σ compatible avec la règle de la main droite appliquée au sens de parcours de $\mathcal{C}$.

(c) Sous les hypothèses envisagées dans l'énoncé, l'application du théorème de Stokes permet de transformer la circulation de **B** en l'intégrale de surface selon

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \iint_\Sigma (\nabla\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

de sorte que, puisque μ_0 est une constante,

$$\iint_\Sigma (\nabla\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \mu_0 i = \mu_0 \iint_\Sigma \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

Cette égalité étant valable quelle que soit la surface Σ (et donc sa normale **n**), on en déduit que

$$\nabla\wedge\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j}$$

qui constitue la forme différentielle locale de la loi considérée.

Question II

i. Considérons la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)^2}$$

Le terme général

$$u_k = \frac{x^k}{(k+2)^2}$$

n'étant pas positif pour tous les x, le critère du quotient est appliqué à la série des modules, *i.e.*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)^2}{|x|^k}\frac{|x|^{k+1}}{(k+3)^2} = |x|\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+2}{k+3}\right)^2 = |x|$$

Il nous assure que la série étudiée converge absolument si $|x|<1$, c'est-à-dire sur l'intervalle de convergence de la série $I=]-1,1[$ et diverge (avec et sans modules) sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

En $x=\pm1$, la série des modules s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)^2}$$

où

$$\frac{1}{(k+2)^2}\sim\frac{1}{k^2}, \quad (k\to+\infty)$$

de sorte que les deux séries numériques convergent absolument.
La série converge donc absolument sur $[-1,1]$.
En tant que série de puissances, elle converge aussi uniformément sur tout intervalle $[a,b]\subset[-1,1]$.

ii. La série définit une fonction f en tous les points où elle converge, c'est-à-dire sur $[-1,1]$.

iii. La série donnée étant une série de puissances, elle définit une fonction continue sur son intervalle de convergence $]-1,1[$ et aux extrémités de celui-ci en lesquelles elle converge. Dès lors, on a $f\in C_0([-1,1])$.

iv. Toute série de puissances est indéfiniment continument dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence. Ainsi, sur $I =]-1,1[$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2 f(x)] = 2xf(x) + x^2 f'(x) &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)^2} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{(k+2)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2+k)x^{k+1}}{(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+2} \end{aligned} \qquad (\dagger)$$

- En vue d'exploiter
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in [-1,1[,$$
notons que, si $x \neq 0$,
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+2} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k+2} = \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - x\right)$$
On a donc
$$\frac{d}{dx}[x^2 f(x)] = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 \quad \text{sur} \quad]-1,0[\cup]0,1[$$
ce qui correspond à la fonction donnée dans l'énoncé si $\alpha = -1$ et $\beta = -1$.
- En $x = 0$, on trouve par ailleurs
$$\left[\frac{d}{dx}[x^2 f(x)]\right]_{x=0} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+2}\right]_{x=0} = 0$$

La relation
$$\frac{d}{dx}[x^2 f(x)] = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} - 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad (\ddagger)$$
est donc valable $\forall x \in]-1,1[$.

La relation ($\ddagger$) est aussi valable en $x = -1$. En effet, d'une part, le développement du logarithme est valable en $x = -1$. D'autre part, la dérivation terme à terme de la série mise en oeuvre dans ($\dagger$) est également possible en $x = -1$ puisque
$$f'(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \frac{k}{(k+2)^2}\bigg|_{x=-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+2)^2}$$
dont la convergence est assurée en tant que série alternée dont le module du terme général, $k/(k+2)^2$ tend monotonément vers 0.
Remarquons qu'il est également possible de justifier la relation en $x = -1$ par continuité. En effet, les fonctions
$$\frac{d}{dx}[x^2 f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+2} \quad \text{et} \quad -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1$$
sont égales sur $]-1,0[$ et continues en $x = -1$ de sorte que l'égalité se prolonge en $x = -1$.

Question III

i. Soit
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2}\, dx$$
Nous constatons d'abord que
$$\frac{\sqrt{\ln x}}{x^2} \in C_0([1,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $[1,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de $+\infty$. On a

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (x \to +\infty)$$

de sorte que l'intégrale existe.

ii. Soit

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{\ln x}}\,dx$$

Nous constatons d'abord que

$$\frac{1}{x^2\sqrt{\ln x}} \in C_0(]1,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]1,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement aux voisinages de $+\infty$ et de 1.

D'une part, on a

$$\frac{1}{x^2\sqrt{\ln x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \to +\infty)$$

ce qui assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

D'autre part, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\ln x \sim x-1, \quad (x \to 1^+)$$

de sorte que

$$\frac{1}{x^2\sqrt{\ln x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad (x \to 1^+)$$

Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de 1. En conclusion, l'intégrale existe.

iii. Soit

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$$

On a

$$\frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \in C_0(]1,+\infty[)$$

Il faut donc encore étudier l'intégrabilité aux voisinages de $+\infty$ et de 1.

L'étude du comportement asymptotique de l'intégrande au voisinage de l'infini ne permet pas de conclure. Par contre, il est possible de déterminer une primitive

$$F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = 2\sqrt{\ln x}$$

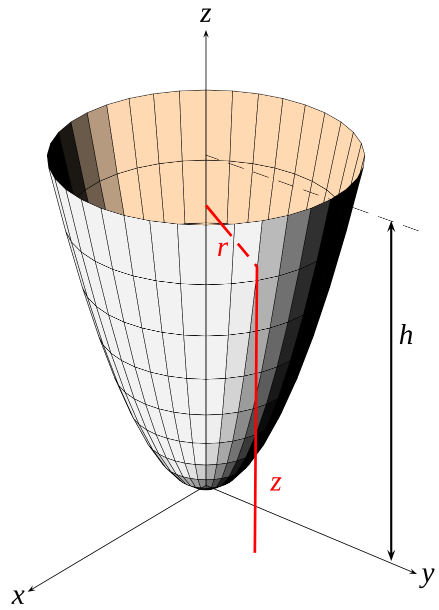
de l'intégrande sur $]1,+\infty[$, telle que

$$\lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\ln x} = +\infty$$

La limite pour $x \to +\infty$ de la primitive n'étant pas finie, on en déduit que l'intégrale n'existe pas en vertu de la contraposée du théorème fondamental du calcul intégral.

Question IV

i. La cuve en forme de paraboloïde de révolution d'équation en coordonnées cylindriques $r = \sqrt{2hz}$, $z \in [0,h]$, est esquissée ci-dessous.



ii. La masse m du fluide remplissant la cuve s'exprime par

$$m = \iiint_V \rho_0 \, dxdydz$$

où V désigne le volume de la cuve.
L'intégrale existe puisque l'intégrande ($= \rho_0$) est continu sur le compact V.

La symétrie de révolution de V autour de l'axe vertical conduit naturellement à utiliser des coordonnées cylindriques pour étudier ce problème. En coordonnées cylindriques, le domaine est décrit par

$$V' = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq z \leq h,\ 0 \leq r \leq \sqrt{2hz}\}$$

En prenant en compte le Jacobien $J = r$ associé au changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques, on obtient

$$\begin{aligned} m = \rho_0 \iiint_V dx\,dy\,dz &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^{\sqrt{2hz}} r\,dr \\ &= \rho_0 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2hz}} dz = \rho_0 \pi \int_0^h 2hz\,dz \\ &= \rho_0 2\pi h \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \rho_0 \pi h^3 \end{aligned}$$

iii. La résultante $\mathbf{F}$ des forces de pression exercées par le fluide sur la surface Σ de la cuve est donnée par

$$\mathbf{F} = \iint_\Sigma p(z)\,\mathbf{n}\,d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la cuve.
La symétrie de révolution suggère encore d'utiliser une paramétrisation de la surface de la cuve basée sur les coordonnées cylindriques. Le vecteur position d'un point de la surface est donné par

$$\mathbf{s}(\theta,z) = r(z)\,\mathbf{e}_r(\theta) + z\,\mathbf{e}_z$$

où $r(z) = \sqrt{2hz}$ de sorte que

$$\mathbf{s}(\theta,z) = \sqrt{2hz}\,\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \qquad \text{avec} \qquad \theta \in]0,2\pi[,\ z \in]0,h[$$

Il vient dès lors successivement

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \sqrt{2hz}\,\mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{\sqrt{2h}}{2\sqrt{z}}\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = -h\mathbf{e}_z + \sqrt{2hz}\,\mathbf{e}_r$$

La normale à la cuve se calcule suivant

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\|} = \frac{-h\mathbf{e}_z + \sqrt{2hz}\,\mathbf{e}_r}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\|}$$

et est bien dirigée, comme demandé, vers l'extérieur de la cuve.

On a donc

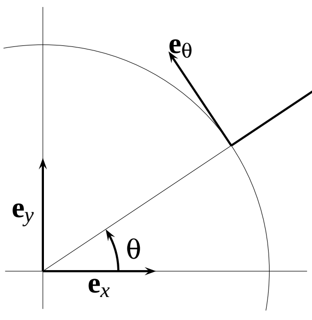
$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int_0^{2\pi} \int_0^h p(z)\, \mathbf{n} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| d\theta\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \; p(z) \frac{(-h\mathbf{e}_z + \sqrt{2hz}\,\mathbf{e}_r)}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\|} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| \, dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \; p(z)(-h\mathbf{e}_z + \sqrt{2hz}\,\mathbf{e}_r)\, d\theta\, dz \\
&= -2\pi h \rho_0 g \left(\int_0^h (h-z)\, dz \right) \mathbf{e}_z + \left(\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^h \; p(z)\sqrt{2hz}\, dz \right) \\
&= -2\pi h \rho_0 g \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \mathbf{e}_z = -2\pi h \rho_0 g \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) \mathbf{e}_z \\
&= -\pi h^3 \rho_0 g \mathbf{e}_z = \pi h^3 \rho_0 \mathbf{g}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r(\theta) d\theta = \mathbf{0}$$

Ce résultat peut être justifié de différentes manières.

- L'intégration effectuée consiste à additionner, en leur faisant faire un tour complet, les vecteurs $\mathbf{e}_r$ successifs, d'où le résultat nul.
- On peut aussi projeter $\mathbf{e}_r$ sur les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ de la base cartésienne. On a



$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\, \mathbf{e}_x + \sin\theta\, \mathbf{e}_y$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \;\; \mathbf{e}_x + \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \;\; \mathbf{e}_y \\
&= \Big[\sin\theta \Big]_0^{2\pi} \mathbf{e}_x + \Big[-\cos\theta \Big]_0^{2\pi} \mathbf{e}_y = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

- On peut encore noter que

$$\frac{d}{d\theta} \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\mathbf{e}_r(\theta)$$

  de sorte que

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} d\theta = -\Big[\mathbf{e}_\theta(\theta) \Big]_0^{2\pi} = -\mathbf{e}_\theta(2\pi) + \mathbf{e}_\theta(0) = \mathbf{0}$$

iv. Les forces agissant sur le fluide sont son poids $m\mathbf{g}$ et la réaction de la cuve aux forces de pression ($-\mathbf{F}$). Prenant en compte les résultats obtenus ci-dessus,

$$m = \rho_0 \pi h^3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \pi h^3 \rho_0 \mathbf{g}$$

on a bien

$$m\mathbf{g} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$