NOM : ........................ PRÉNOM : ....................

NUMÉRO D'ORDRE : ............

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2021

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

*Durée de l'épreuve : 3 heures.*
*Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*
*Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
*Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre* ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
*Rendez le questionnaire avec vos copies.*

## Question I

A. On considère la suite de fonctions $f_k(x) = x^k(1-x^k)$ sur $[0,1]$.

i. Déterminez la fonction $f$ vers laquelle la suite converge sur $[0,1]$.

ii. Vérifiez par le calcul que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (\heartsuit)$$

iii. Sur base de l'étude des extrema des $f_k$ sur $[0,1]$, montrez que le résultat $(\heartsuit)$ ne peut être justifié théoriquement par application du théorème relatif à l'intégration des suites de fonctions continues.

iv. Montrez que le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet par contre d'expliquer le résultat $(\heartsuit)$.

B. Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\iint_{\mathrm{E}} \frac{dxdy}{xy}$$

où $\mathrm{E}$ est la région du premier quadrant limitée supérieurement par la droite $y = x$ et inférieurement par la parabole $y = x^2$.

*Tournez la page.*

## Question II

On considère la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$

i. Étudiez la convergence simple et la convergence uniforme de la série.

ii. Sur quel domaine la série définit-elle une fonction ?

iii. Étudiez la continuité de la fonction $f$ définie par la série.

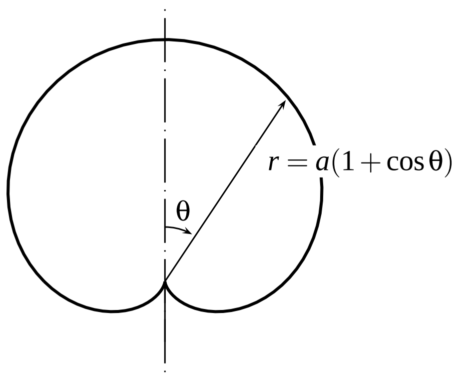
iv. Montrez que $f''(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ sur l'intervalle de convergence de la série. Justifiez.

v. Exprimez $f'$ en termes de fonctions connues. Dans quel domaine cette représentation de la dérivée de $f$ est-elle valable ?

Rappel : $\dfrac{1}{1-q}=\sum_{k=0}^{\infty}q^k$ si $|q|<1$.

## Question III

On considère la cardioïde d'équation (en coordonnées polaires) $r=a(1+\cos\theta)$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$ et où $a$ est une constante strictement positive.




i. Calculez l'aire de la surface plane délimitée par la cardioïde.

ii. Calculez la longueur de la cardioïde.

iii. Calculez le volume de révolution généré par la rotation de la cardioïde autour de son axe de symétrie. L'utilisation des coordonnées sphériques est conseillée pour cette sous-question.

## Question I

A. Soit la suite des fonctions $f_k(x) = x^k(1-x^k)$ sur $[0,1]$.

i. Sachant que

$$\lim_{k\to+\infty} x^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

la limite de la suite est donnée par

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

ii. On calcule successivement

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx &= \lim_{k\to+\infty}\int_0^1 x^k(1-x^k)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_0^1 (x^k - x^{2k})\,dx \\ &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1}\right) = 0\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

de sorte que l'égalité est bien vérifiée.

iii. Recherchons les extrema des $f_k(x) = x^k - x^{2k}$ sur $[0,1]$. On a

$$f_k'(x) = kx^{k-1} - 2kx^{2k-1} = kx^{k-1}(1-2x^k)$$

de sorte que ces fonctions possèdent des points stationnaires en

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \sqrt[k]{1/2} < 1$$

où

$$f_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_k(\sqrt[k]{1/2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

On peut montrer que le premier point stationnaire correspond à un minimum local et le second à un maximum de $f_k$.

On en déduit que la différence $|f_k(x) - f(x)| = |f_k(x)|$ ne peut être rendue arbitrairement petite simultanément pour toutes les valeurs de $x \in [0,1]$ puisque, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe un point $\tilde{x}_k = 2^{-1/k}$ de l'intervalle $[0,1]$ en lequel la différence est égale à $1/4$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$.

Ce résultat entraine que l'on ne peut pas justifier le fait que l'intégrale de la limite de la suite des $f_k$ est égale à la limite des intégrales des $f_k$ par le théorème relatif à l'intégration des suites de fonctions continues puisque ce théorème s'appuie sur l'hypothèse de convergence uniforme sur $[0,1]$.

iv. Les hypothèses du théorème de Lebesgue sont satisfaites puisque

- $f_k \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ vu que $f_k \in C_0([0,1])$ ;
- la suite des $f_k$ converge presque partout sur $[0,1]$ vers la fonction $f = 0$ ;
- $|f_k(x)| = |x^k(1-x^k)| \leq 1 \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ presque partout sur $[0,1]$ et pour tout $k$.

Ceci justifie le passage de la limite sous le signe d'intégration, *i.e.*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\ dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx$$

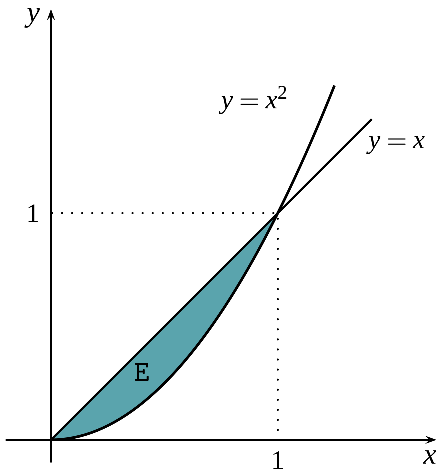
B. On doit étudier l'existence de

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{dxdy}{xy}$$

où

$$\mathtt{E} = \{(x,y) : x\in[0,1],\ y\in[x^2,x]\}$$

L'ensemble $\mathtt{E}$ est compact mais la fonction $1/(xy)$ n'est pas continue sur $\mathtt{E}$ puisqu'elle n'est pas définie au point $(0,0)$.




L'intégrande étant positif sur $\mathtt{E}$, on a $|1/(xy)| = 1/(xy)$ et l'existence des intégrales successives

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^x \frac{1}{xy}dy$$

assurerait l'existence de l'intégrale double (Tonelli).

- Pour (presque) tout $x$ dans $]0,1[$, $1/(xy)$ est intégrable par rapport à $y$ sur l'intervalle $]x^2,x[$ puisque

$$\frac{1}{xy}\in C_0([x^2,x])$$

  On calcule aisément

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{xy}dy = \frac{1}{x}\left[\ln y\right]_{x^2}^x = \frac{1}{x}\left(\ln x - \ln x^2\right) = \frac{1}{x}\ln\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

- Il faut ensuite examiner si

$$-\frac{\ln x}{x}\in\mathbb{L}_1(]0,1[)$$

  Ce n'est pas le cas puisque

$$\frac{1}{x} = o\left(-\frac{\ln x}{x}\right), \quad (x\to 0)$$

La non-intégrabilité de $-\ln x/x$ dans l'intervalle considéré peut aussi être démontrée en remarquant que cette fonction admet la primitive

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln^2 x \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$$

or, si $-\ln x/x$ était intégrable sur $]0,1[$, sa primitive admettrait une limite finie en 0.

Les raisonnements ci-dessus montrent que $1/(xy) \notin \mathbb{L}_1(\mathtt{E})$. En effet, si une fonction est intégrable, tous les ordres d'intégration partielle existent et conduisent au même résultat (théorème de Fubini). Puisqu'on a trouvé un ordre d'intégration partielle qui n'existe pas, on en conclut que la fonction n'est pas intégrable sur le domaine E considéré.

## Question II

i. Le terme général

$$u_k = (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$

n'étant pas positif pour tous les $k$, le critère du quotient est appliqué à la série des modules :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+5}}{(2k+4)(2k+5)} \frac{(2k+2)(2k+3)}{|x|^{2k+3}} = |x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+4)(2k+5)} = |x|^2$$

Il nous assure que la série étudiée converge absolument si $|x|^2 < 1$, c'est-à-dire sur $I = ]-1,1[$ où $I$ est l'intervalle de convergence de la série, et diverge (avec et sans module) sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. En $x = \pm 1$, la série des modules s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}$$

où

$$\frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \sim \frac{1}{4k^2}, \quad (k \to +\infty)$$

La série converge donc absolument en $x = \pm 1$.

En conclusion, la série converge simplement sur $[-1,1]$.

La série donnée étant une série de puissances convergeant simplement sur $[-1,1]$, elle converge uniformément sur $[-1,1]$.

ii. Puisque la série donnée converge sur $[-1,1]$, elle définit une fonction sur $[-1,1]$.

iii. La série considérée étant une série de puissances convergeant sur $[-1,1]$, elle définit une fonction continue sur $[-1,1]$.

iv. Toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence. Ainsi,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)}$$

est indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur $I = ]-1,1[$. Sur cet intervalle, il vient successivement

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}$$

puis

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k} = x \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{x}{1+x^2}$$

où la dernière égalité est obtenue en posant $q = -x^2 \in ]-1,1[$ dans

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{pour} \quad |q| < 1$$

On a donc

$$f''(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{sur} \quad I = ]-1,1[$$

v. En primitivant l'expression ci-dessus, on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad \forall x \in ]-1,1[ \tag{†}$$

La constante $C$ peut être déterminée en remarquant que

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\bigg|_{x=0} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \cdots \bigg|_{x=0} = 0$$

de sorte que l'égalité (†) en $x = 0$, devient $0 = 0 + C$, soit $C = 0$. On en déduit que

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad \forall x \in ]-1,1[ \tag{‡}$$

Cette égalité peut être prolongée sur l'intervalle $[-1,1]$ par le raisonnement suivant.

D'une part, on sait que toute série de puissances est continûment dérivable terme à terme aux extrémités de son intervalle de convergence où la série des dérivées considérées converge. La fonction $f$ est donc continûment dérivable en $-1$ et en $+1$, puisque la série des dérivées évaluée en ces points s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\bigg|_{x=\pm 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+2}$$

qui est semi-convergente en tant que série numérique alternée dont le terme général en module $1/(2k+2)$ tend monotonément vers 0.

D'autre part, puisque $f'$ et $1/2\ln(1+x^2)$ sont toutes deux continues sur $[-1,1]$ et égales sur $]-1,1[$, cette égalité (‡) se prolonge aux extrémités de l'intervalle, *i.e.*

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad \forall x \in [-1,1]$$

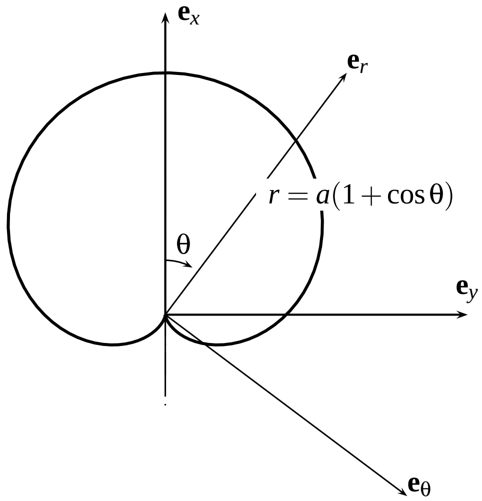
**Question III**

i. Soit $\Sigma$ la surface délimitée par la cardioïde. L'aire à calculer s'exprime par

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma dx\,dy$$

En coordonnées polaires, cette surface est représentée par

$$\Sigma' = \{(r,\theta)\ :\ \theta \in ]-\pi,\pi[,\ r \in ]0, a(1+\cos\theta)[\}$$




Ainsi, en introduisant le Jacobien $r$ du changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et polaires, il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \iint_\Sigma dxdy &= \iint_{\Sigma'} r\,drd\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)+2\cos\theta\right)d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta + 2\cos\theta\right)d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta + 2\sin\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{3\pi a^2}{2}
\end{aligned}$$

ii. En coordonnées polaires, le vecteur position d'un point de la cardioïde est donné par

$$\mathbf{s}(\theta) = r\mathbf{e}_r = a(1+\cos\theta)\mathbf{e}_r,\ \theta \in ]-\pi,\pi[$$

Puisque $\dfrac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta$, il vient

$$\mathbf{s}'(\theta) = -a\sin\theta\,\mathbf{e}_r + a(1+\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s}'(\theta)\| &= a\sqrt{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2} \\
&= a\sqrt{\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta} \\
&= a\sqrt{2+2\cos\theta} \\
&= a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} \\
&= a\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\
&= 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = 2a\cos\frac{\theta}{2} \text{ sur } ]-\pi,\pi[
\end{aligned}$$

De là, en tenant compte de la symétrie de la courbe par rapport à l'axe OX,

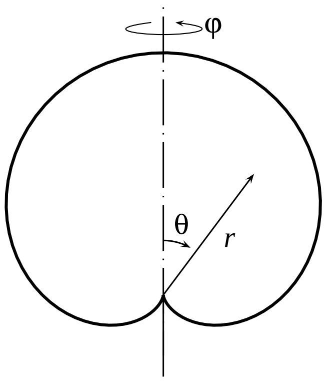
$$\mathcal{L} = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi} = 8a$$

iii. Soit $\Omega$ le corps engendré par la rotation de la cardioïde. Le volume à calculer s'exprime par

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

En coordonnées sphériques, ce domaine est décrit par

$$\Omega' = \{(r,\theta,\varphi)\ :\ \theta \in ]0,\pi[,\ \varphi \in ]0,2\pi[,\ r \in ]0, a(1+\cos\theta)[\}$$




Ainsi, en introduisant le Jacobien $r^2\sin\theta$ du changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et sphériques, on obtient

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega'} r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\, dr \\
&= 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\frac{a^3(1+\cos\theta)^3}{3}\, d\theta \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}\left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}\left[\frac{2^4}{4}\right] \\
&= \frac{8\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$